

20 Einführung in die Quantenphysik

Inhaltsverzeichnis

20	Einführung in die Quantenphysik.....	1
20.1	Einleitung	3
20.2	Photoeffekt erster Teil	3
20.3	Schwarzkörperstrahlung	3
20.3.1	Das Wien'sche Verschiebungsgesetz	4
20.3.2	Das Rayleigh-Jeans-Gesetz	4
20.3.3	Max Planck	5
20.4	Photoeffekt zweiter Teil.....	6
20.5	Innerer Photoeffekt	9
20.6	Masse und Impuls der Photonen.....	10
20.6.1	Der Comptoneffekt	10
20.7	Elektronen – neu betrachtet.....	11
20.7.1	Das Davisson – Germer Experiment.....	12
20.8	Die Schrödinger – Gleichung.....	15
20.8.1	Die Wahrscheinlichkeitsdichte $ \Psi ^2$	17
20.9	Die Heisenbergsche Unschärferelation	17
20.10	Der Tunneleffekt	18
20.10.1	Das Rastertunnelmikroskop	19
20.11	Atomspektren	19
20.11.1	Das Rutherford'sche Atommodell.....	20
20.11.2	Das Bohrsche Atommodell	22
20.12	Die Schrödingergleichung – Anwendungen.....	28
20.12.1	Das Elektron in der Falle	28
20.12.2	Der α – Zerfall.....	30
20.13	Simulation: Schwarzkörperstrahlung.....	32
20.14	Simulation: Fotoelektrischer Effekt / Photoeffekt.....	36
20.15	Simulation: Das Davisson-Germer Experiment.....	40
20.16	Simulation: Laser.....	42
20.17	Aufgaben.....	45

20.1 Einleitung

Wir schreiben das Jahr 1887. Gerade etabliert sich die Vorstellung von Licht als elektromagnetische Welle, denn erst 1875 hat Hendrick Antoon Lorentz die entsprechende Theorie dazu formuliert. Vorher betrachtete man Licht zwar auch als Welle, jedoch als mechanische Wellen. Elektronen waren noch nicht bekannt, die sollten erst im Jahre 1897 durch Joseph John Thomson experimentell nachgewiesen werden. Auch waren weder Protonen noch Neutronen bekannt. Selbst die Atomtheorie wurde von vielen Physikern als reine Hypothese betrachtet, obwohl die Chemiker damit viel erklären konnten. Soviel zur Ausgangslage.

20.2 Photoeffekt erster Teil

Es trug sich im Jahre 1886 zu, dass Heinrich Hertz bei der Entladung einer Elektrode beobachtete, dass die Funkenlänge durch Licht beeinflusst werden kann. 1887 dann führte Wilhelm Hallwachs die Experimente weiter ([Abbildung 1](#)). Er stellte fest, dass UV-Strahlung negativ geladene Platten entladen und ungeladene Platten positiv aufladen konnte. Dies nennt man **PHOTOEFFEKT**.

Wiederholt man das Experiment mit dem in der [Abbildung 2](#) gezeigten Versuchsaufbau, so kann man dieses Ergebnis selbst nachvollziehen. Ausserdem stellt man fest, dass man mit "normalem Licht" keine Entladung herbeiführen kann. Eine Glasplatte im Strahlengang einer UV – Lampe verhindert ebenfalls eine Reaktion des Elektroskops.

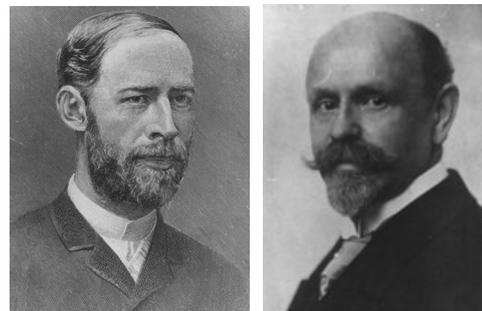


Abbildung 1: Heinrich Hertz links (1857-1894) und Wilhelm Hallwachs (1859-1922) Quelle: Wikipedia und www.tu-dresden.de

20.3 Schwarzkörperstrahlung

Verlassen wir den Photoeffekt mal und wenden wir uns einem anderen physikalischen Schauplatz zu. Es geht um sogenannte **SCHWARZE KÖRPER**. Dabei handelt es sich um Objekte, welche sämtliche einfallende elektromagnetische Strahlung absorbieren und in Form eines ihrer Temperatur entsprechenden charakteristischen elektromagnetischen Strahlungsspektrum wieder emittieren. Weil bei Raumtemperatur die emittierte Strahlung nicht sichtbar ist, erscheinen solche Körper natürlich schwarz – daher der Name.

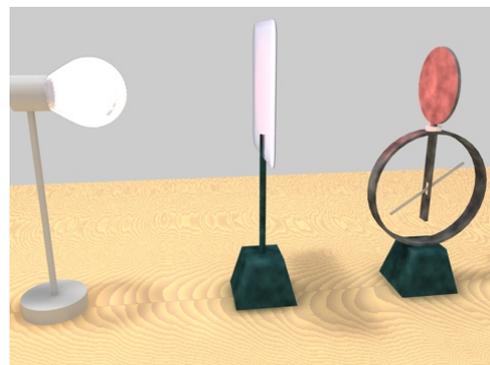


Abbildung 2: Aufbau des Experiments zum Photoeffekt: eine Lampe (links) beleuchtet eine Metallplatte auf einem geladenen Elektroskop. Dazwischen kann sich auch noch eine Glasplatte befinden.

Aufgabe: Bearbeiten Sie die [Simulation 20.13](#) zur Schwarzkörperstrahlung bevor Sie weiterlesen!

Soweit so gut: Dass Körper aufgrund ihrer Temperatur eine charakteristische Strahlung abgeben, hatte bereits Gustav Robert Kirchhoff 1859 ausgesagt. Das Problem lag in der Beschreibung des Verlaufs der abgestrahlten Leistung als Funktion der Wellenlänge. Dieser Verlauf ist in **Abbildung 3** für drei verschiedene Temperaturen gezeigt. Es fällt auf, dass das Maximum mit zunehmender Temperatur stark grösser wird und sich nach links zu kürzeren Wellenlängen hin verschiebt.

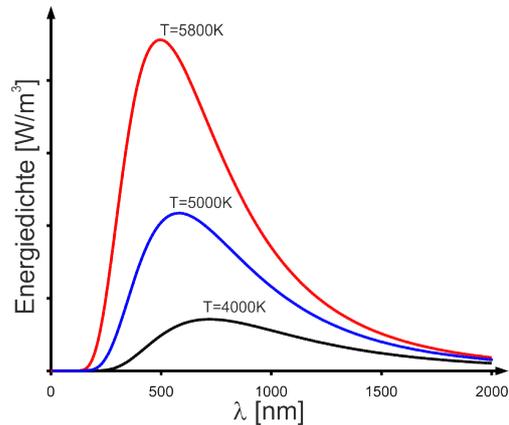


Abbildung 3: Abgestrahlte Energiedichte eines Schwarzen Körpers in Abhängigkeit von der Wellenlänge bei drei Temperaturen.

20.3.1 Das Wien'sche Verschiebungsgesetz

1896 machte Wilhelm Wien (**Abbildung 5**) einen ersten Vorschlag zur Beschreibung der von einem schwarzen Körper emittierten Strahlung. Das **WIEN'SCHE STRAHLUNGS- oder VERSCHIEBUNGSGESETZ**, wie es heute genannt wird, war geboren:

$$U(\lambda, T) = \frac{C}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{c}{\lambda T}}. \quad (1)$$



Abbildung 5:
Wilhelm Wien
(1864-1928)
Quelle: Wikipedia

Dabei ist $U(\lambda, t)$ die spektrale Leistungsdichte in (W/m^3) und C , respektive c stehen für empirische Konstanten. Wie man in **Abbildung 4** im Vergleich der Kurven "Messung" und "Wien" sehen kann, stimmt diese Formel leider nur für ganz kleine Wellenlängen.

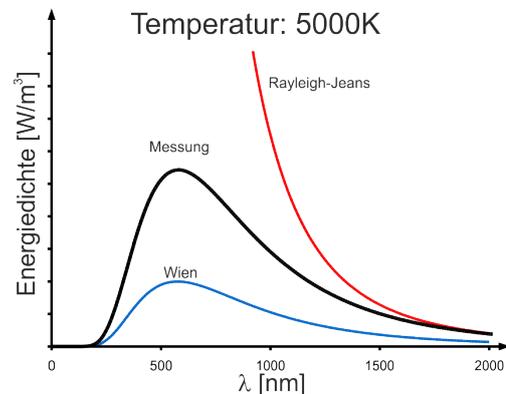


Abbildung 4: Abgestrahlte Energiedichte eines Schwarzen Körpers bei 5000K (Messung). Ebenfalls zu sehen sind das Wiensche-Verschiebungsgesetz und das Rayleigh-Jeans-Gesetz

20.3.2 Das Rayleigh-Jeans-Gesetz

1900 veröffentlichte der englische Physiker John William Strutt, 3. Baron Rayleigh, eine weitere Formel, die Licht ins Dunkel bringen sollte:

$$U(\lambda, T) = 8 \cdot \pi \cdot c_0 \cdot k_B \cdot \frac{T}{\lambda^4} \quad (2)$$

Dabei steht c_0 für die Lichtgeschwindigkeit und k_B für die Boltzmann – Konstante. Diese Formel beschreibt die Wirklichkeit ebenfalls falsch, weshalb sie 1905 vom englischen Physiker Sir

James Hopwood Jeans ([Abbildung 6](#)) korrigiert wurde zu dem, was heute als das **RAYLEIGH-JEANS-GESETZ** bekannt ist:

$$U(\lambda, T) = 2 \cdot \pi \cdot c_0 \cdot k_B \cdot \frac{T}{\lambda^4} \quad (3)$$

Falsch ist die Formel aber leider immer noch, wie man [Abbildung 4](#) entnehmen kann. Sie beschreibt die Zusammenhänge zwar bei hohen Wellenlängen richtig, versagt aber bei kleinen Wellenlängen.



Abbildung 6: John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (1842-1919) und Sir James Hopwood Jeans (1877-1946) (vl).Quelle: Wikipedia

20.3.3 Max Planck

Am 19. Oktober des Jahres 1900 stellte Max Planck ([Abbildung 7](#)) auf der Versammlung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft sein vorläufiges Strahlungsgesetz vor. Es handelte sich um eine Interpolation zwischen dem Strahlungsgesetz von Wien und dem von Rayleigh:

$$U(\lambda, T) = \frac{C}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c}{\lambda \cdot T}} - 1} \quad (4)$$

Man beachte, dass Planck – verglichen mit Wien – im Nenner lediglich noch “-1” geschrieben hat! Die empirischen Konstanten "C" und "c" hat er vorderhand stehen lassen. Nach acht Wochen weiterer harter Arbeit schaffte er es aber, die beiden Konstanten durch bekannte Naturkonstanten auszudrücken. Am 14. Dezember 1900 veröffentlichte er die nach ihm benannte **PLANCK'SCHE STRAHLUNGSFORMEL**



$$U(\lambda, T) = \frac{2 \cdot \pi \cdot c_0^2 \cdot h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c_0}{k_B \cdot \lambda \cdot T}} - 1} \quad (5)$$

Diese Formel beschreibt die gemessenen Daten exakt. Die einzige neue Grösse war das “h” (Hilfskonstante) in der Funktion. Dieser unscheinbare Buchstabe hat es hier aber in sich: Zur physikalischen Erklärung des Spektrums eines schwarzen Körpers musste Planck annehmen, dass die Lichtenergie nicht kontinuierlich vom Körper abgegeben wird, sondern in **ENERGIEPAKETEN**. Die Energie der Quanten, mit denen strahlenden Körper Energie austauschen ist stets ein ganzzahliges Vielfaches der Grösse h. Heute wird dieses h Planck zu Ehren “**PLANCKSCHES WIRKUNGSQUANTUM**” genannt, das den Wert

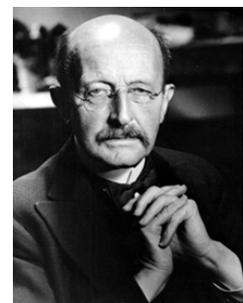


Abbildung 7: Max Planck (1858-1947)
Quelle: www.schleswig-holstein.de

$$h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (6)$$

besitzt.

Planck selbst hat – und das ist wichtig – nicht gesagt, dass die Strahlung gequantelt sei, Licht also in Form von Teilchen unterwegs ist.

20.4 Photoeffekt zweiter Teil

Was hat obige Geschichte nun mit dem Photoeffekt zu tun? Wir befinden uns jetzt im Jahre 1902. Inzwischen sind die Elektronen als Ladungsträger beim Photoeffekt identifiziert worden (1899).

Wir wollen an dieser Stelle ein Experiment zum Photoeffekt durchführen. Der Versuchsaufbau ist in [Abbildung 8](#) schematisch gezeigt: Licht fällt im Innern einer [Photozelle](#) (Vakuum) auf ein Metall. Dabei hält eine Blende das Licht vom Ring im Innern der Photozelle ab. Zwischen Ring und Metall wird ein Spannungsmesser angebracht. Fällt nun Licht auf das Metall, so werden Elektronen aus dem Metall herausgelöst und landen auf dem Ring, den sie negativ aufladen. So entsteht zwischen Ring und Metall eine Spannung. Bei genügend grosser Spannung haben die Photoelektronen aus dem Metall aber nicht mehr genug kinetische Energie, um zum Ring zu gelangen. Es gilt dann

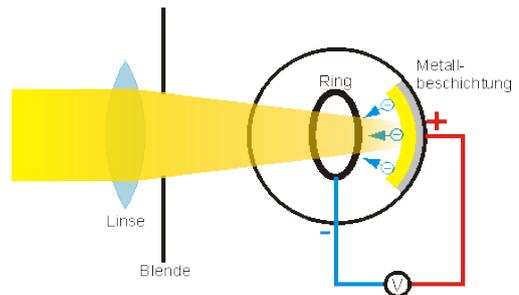


Abbildung 8: Schematische Darstellung des Experimentaufbaus zum Photoeffekt. Der Teil auf der rechten Seite der Blende entspricht der Photozelle.

$$E_{kin,max} = q \cdot U_{max} \quad (7)$$

Die maximale kinetische Energie der Elektronen reicht gerade nicht mehr aus, das aufgebaute elektrische Gegenfeld zu überwinden.

Aufgabe: Bearbeiten Sie die [Simulation 20.14](#) zum Photoeffekt bevor Sie weiterlesen!

Experiment (Plenum): Im Experiment verwenden wir eine Quecksilberdampf Lampe zur Belichtung der Photozelle. Ihr Licht wird mit Hilfe eines Gitters zusätzlich in seine Spektrallinien aufgespalten, so dass monochromatisches Licht einer bekannten Wellenlänge auf die Photozelle fällt. Entsprechende Filter helfen dabei.

Aufbau

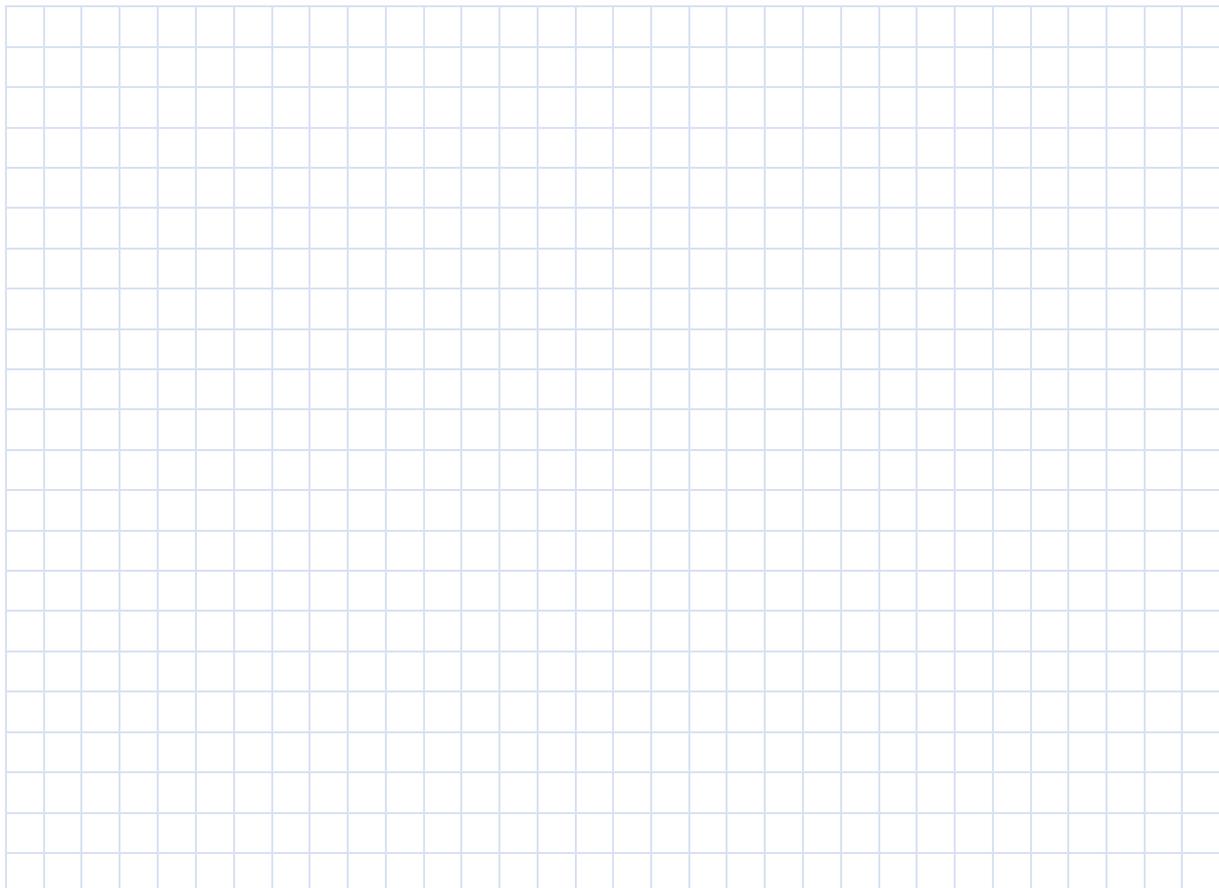


Resultate:

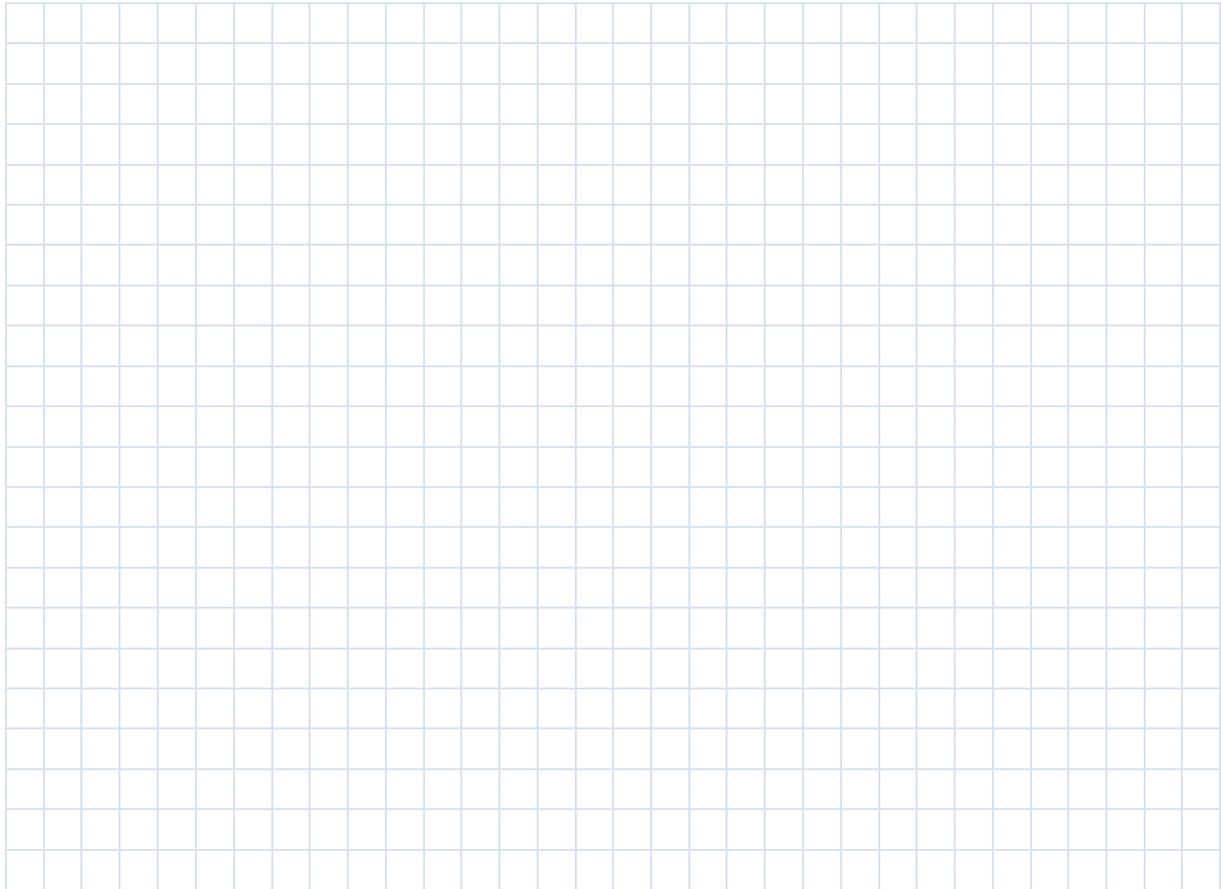
Farbe	Hg - Spektrallinie	Wellenlänge [nm]	Frequenz [10^{14} Hz]	U_{\max} [V]	W_{\max} [eV]
orange		579.07	5.2		
orange		576.96	5.2		
grün		546.07	5.5		
blau-violett		435.8	6.9		
violett		404.7	7.4		
UV		365.7	8.2		

Auswertung:

Zur Auswertung wird die maximale Energie der Photoelektronen W_{\max} (in eV) gegen die Frequenz (in 10^{14} Hz) aufgetragen.



Analyse und Diskussion



Genau wie wir bemerkte bereits 1902 der deutsche Physiker Philipp Lenard ([Abbildung 9](#)), dass beim Photoeffekt die Lichtintensität des eingestrahnten Lichtes keinen Einfluss auf die Energie der abgestrahlten Elektronen hat.

Dies ist seltsam, sollte doch aufgrund der Wellennatur des Lichtes mehr Energie auf die Elektronen übertragen werden, wenn die Intensität des Lichtes – also die Amplitude der Lichtwelle – zunimmt.

Erst Albert Einstein konnte den Effekt 1905 in seinem Werk "[Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichts betreffenden heuristischen Gesichtspunkt](#)" (Annalen der Physik, **17**, 132 (1905)) erklären. Er schlug vor, dass nicht die Energie gequantelt ist, sondern sogar das Licht selbst! Dies war ihm aber nur möglich, weil Max Planck zur Erklärung des Spektrums eines schwarzen Körpers ja bekanntermassen bereits eine Quantelung der Energie angenommen hatte. Ironischerweise lehnte gerade Planck zu Beginn die Theorie von Lichtquanten vehement ab!



Abbildung 9 Philipp Eduard Anton (von) Lenard (1862-1947)
Quelle: Wikipedia

Zusammenfassung:

Beim Photoeffekt treffen Lichtquanten auf Metall-elektronen und übertragen diesen einen Teil ihrer Energie. Ist dieser Energieübertrag grösser als die Austrittsarbeit W_A , so können die entsprechenden Elektronen aus dem Metall austreten. Die Austrittsarbeit hängt vom verwendeten Kathodenmaterial ab und ist charakteristisch für ein Metall (**Abbildung 10**).

Die Energie der abgelösten Elektronen ist unabhängig von der Lichtintensität und hängt nur von der Frequenz f des einfallenden Lichts über $E = h \cdot f$ zusammen. Die Konstante h wird dabei als "Plancksches Wirkungsquantum" bezeichnet und hat den Wert $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

Als Schluss folgt,

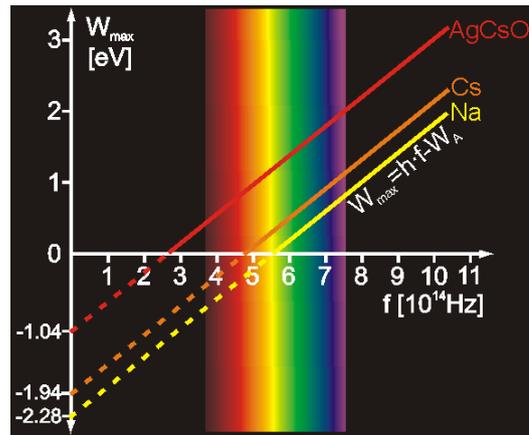


Abbildung 10 Maximale kinetische Energie der Photoelektronen als Funktion der Frequenz des einfallenden Lichts für verschiedene Materialien.



dass die Energie von Licht in einzelne Quanten aufgeteilt ist – diese Energieportionen nennt man Photonen. Obwohl diese Bezeichnung eine klassische Teilchenvorstellung nahelegt, will sie lediglich sagen, dass die **Energieportion $h \cdot f$** der Lichtwelle unteilbar ist.

20.5 Innerer Photoeffekt

Wenn man einen Halbleiter mit Licht geeigneter Wellenlänge bestrahlt, so werden Elektronen aus ihrer festen Bindung mit Atomen gelöst. Dadurch steigt die Leitfähigkeit des Halbleiters. In diesem Fall spricht man vom inneren Photoeffekt, weil dadurch die betroffenen Elektronen nur aus der Bindung herausgelöst werden, nicht aber aus dem Material selbst (**Abbildung 11**).

Man nutzt diesen Effekt z.B. in der Photometrie in Luxmetern: Licht kann Elektronen aus Silizium herauslösen, wodurch diese vom Valenz- in das Leitungsband angehoben werden. Die Leitfähigkeit stellt nun ein Mass für die Beleuchtungsstärke dar.

In Solarzellen wird auf diese Weise direkt Lichtenergie in elektrische Energie umgewandelt.

Aber auch Leuchtdioden funktionieren dank dem Photoeffekt – allerdings "umgekehrt". Die Elektronen des elektrischen Stromes werden kurzfristig von den Atomen des Materials festgehalten und geben dadurch ihre Energie mit Hilfe von Photonen ab.

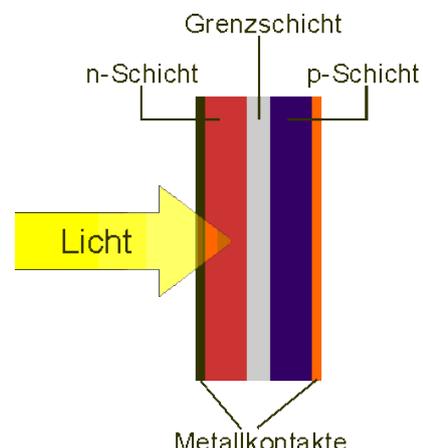


Abbildung 11 Darstellung des inneren Photoeffekts.

20.6 Masse und Impuls der Photonen

Die von Einstein ebenfalls 1905 veröffentlichte spezielle Relativitätstheorie ermöglicht eine verblüffende Erweiterung der bisherigen Resultate. Gemäss Einstein kann jeder Energie gemäss $E = m \cdot c^2$ auch eine Masse zugeordnet werden. Kombiniert man das mit dem Ergebnis aus dem Photoeffekt, dass ein Lichtquant die Energie $E = h \cdot f$ besitzt, so bekommt man für die Masse eines **PHOTONS**

$$m = \frac{hf}{c^2} \quad (8)$$

Aber aufgepasst: diese Masse hat das Photon nur im Flug, denn ein Photon kann nur bei Lichtgeschwindigkeit existieren!

Im Jahre 1916 erweiterte Albert Einstein seine Lichtquantenhypothese, indem er für ein Photon auch einen linearen Impuls formulierte. Aus der klassischen Definition für den Impuls eines Teilchens

$$p = m \cdot v = m \cdot c \quad (9)$$

und mit Beziehung (8), folgt für den Impuls eines Photons sofort



$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (10)$$

Wenn ein Photon auf Materie trifft, wird daher nicht nur Energie übertragen, sondern auch Impuls, wie wenn es sich um einen klassischen Stoss handeln würde.

20.6.1 Der Comptoneffekt

1923 wurde von Arthur Compton (**Abbildung 12**) ein Experiment durchgeführt, das die Vermutung von Energie- und Impulsübertragung durch Photonen untermauerte. Bei diesem Experiment wurden Röntgenstrahlen mit einer gegebenen Wellenlänge λ auf eine Kohlenstoffprobe geschossen. Registriert wurde nun, unter verschiedenen Winkeln, die Intensität und die Wellenlängen der gestreuten Röntgenstrahlen (**Abbildung 13**).

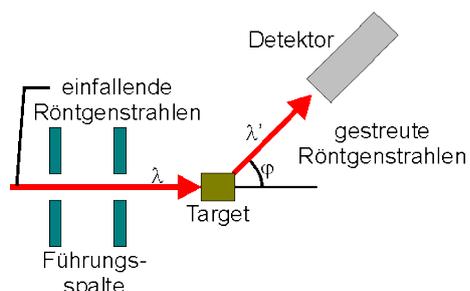


Abbildung 13 Schematischer Aufbau des Experiments von Compton.



Abbildung 12 Arthur Holly Compton (1892-1962)
Quelle: nobelprize.org

Die nächste Abbildung zeigt schematisch Comptons Resultate für zwei verschiedene Streuwinkel. Man kann erkennen, dass – obwohl der einfallende Röntgenstrahl nur eine einzige Wellenlänge aufweist, ist in den Spektren für die gestreuten Röntgenstrahlen ein breites Spektrum an Wellenlängen vertreten ist. Ebenso auffällig sind zwei ausgeprägte Maxima. Eines davon liegt bei derselben Wellenlänge wie der einfallende Röntgenstrahl. Das zweite Maximum verschiebt sich mit

grösser werdendem Streuwinkel zu grösseren Wellenlängen hin. Zwischen den beiden Maxima liegt die Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$, die sogenannte Compton – Verschiebung (Abbildung 14).

Compton interpretierte die Streuung der Röntgenstrahlung an Kohlenstoff als Energie- und Impulsübertragung zwischen den einfallenden Röntgenstrahlen und den locker gebundenen Elektronen im Kohlenstoff.

Für die Compton – Verschiebung als Funktion des Streuwinkels ϕ erhält man nach ein wenig Mathematik

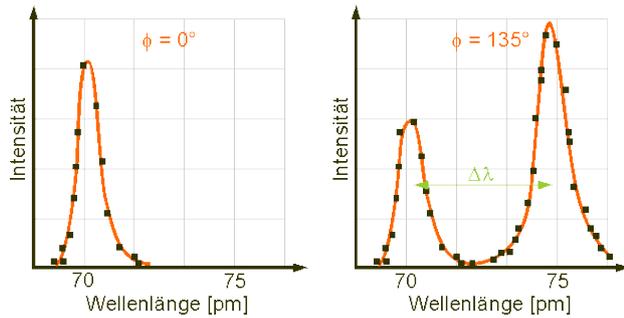


Abbildung 14 Messergebnisse des Compton-Experiments.



$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) , \quad (11)$$

wobei man die Grösse $\frac{h}{mc}$ als **COMPTON – WELLENLÄNGE** bezeichnet. Diese hängt von der Masse des Teilchens ab, welches die einfallenden Strahlen streut. Im vorliegenden Fall haben locker gebundene Elektronen der Kohlenstoffprobe den Röntgenstrahl gestreut (2. Peak), also setzt man für die Masse m die Masse des Elektrons ein.

20.7 Elektronen – neu betrachtet

Im Jahre 1924 stellte der französische Physiker Prinz Louis de Broglie (Abbildung 15) in seiner Doktorarbeit (*“Recherches sur la théorie des Quanta”*) eine Hypothese auf, für deren Gültigkeit es zunächst keinerlei experimentelle Hinweise gab. Wenn Licht Wellen- und Teilcheneigenschaften aufweist, dann trifft dies vielleicht auch für Elektronen zu. Verhalten sich diese Teilchen manchmal wie Wellen? De Broglie vermutete, dass der Zusammenhang



Abbildung 15 Prince Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie (1892-1987)
Quelle: nobelprize.org

$$E = h \cdot f, \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

zwischen den Teilcheneigenschaften E , p und den Welleneigenschaften f , λ nicht nur für Photonen, sondern auch für Elektronen und andere Teilchen zutrifft.

De Broglie konnte mit seiner Hypothese einige Eigenschaften der Atome erklären und schlug auch einen experimentellen Test vor: "Wenn ein Elektronenstrahl eine sehr kleine Öffnung durchquert, so sollten Beugungserscheinungen auftreten."

Wie klein müssen diese Öffnungen sein? Beugungserscheinungen werden dann makroskopisch sichtbar, wenn der Durchmesser d einer Öffnung etwa von der gleichen Grössenordnung wie die Wellenlänge λ ist, die wir aus

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \quad (12)$$

berechnen können. Die **DE-BROGLIE-WELLENLÄNGE** λ von Elektronen mit der kinetischen Energie E_k bzw. der Geschwindigkeit v beträgt somit



$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{h}{m_e \cdot v} \quad (13)$$

mit $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js und der Masse des Elektrons $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg. Werden Elektronen durch eine Spannung von einigen Volt beschleunigt, so weisen sie Wellenlängen auf, die mit dem Atomabstand in Kristallen vergleichbar sind. Als Beugungsgitter können somit die Gitterebenen von Kristallen verwendet werden.

20.7.1 Das Davisson – Germer Experiment

Der erste Nachweis der Elektronenbeugung gelang am 6. Januar 1927 Clinton Davisson und Lester Germer (**Abbildung 16**) in den Laboratorien der Bell Telephone Company in New York. Sie richteten einen Elektronenstrahl auf einen Nickelkristall (Atomabstand $d = 0.215$ nm) und beobachteten unter dem Winkel $\varphi = 50^\circ$ ein Beugungsmaximum erster Ordnung (**Abbildung 17**). Die ermittelte Wellenlänge von $\lambda = 0.165$ nm stimmte mit der Vorhersage de Broglies für die verwendete Beschleunigungsspannung von $U = 54$ V überein.



Abbildung 16 Clinton Joseph Davisson (1881-1956) und Lester Halbert Germer (1896-1971) v.l. Quelle: Wikipedia

1937 erhielt Davisson den Nobelpreis für Physik für die Entdeckung der Beugung von Elektronen an Kristallen, zusammen mit George Paget Thomson (**Abbildung 18**), der die Existenz von Materiewellen im gleichen Jahr, aber unabhängig von Davisson und Germer, nachgewiesen hatte.



Abbildung 18 George Paget Thomson (1892-1975). Quelle: www.nobelprize.org

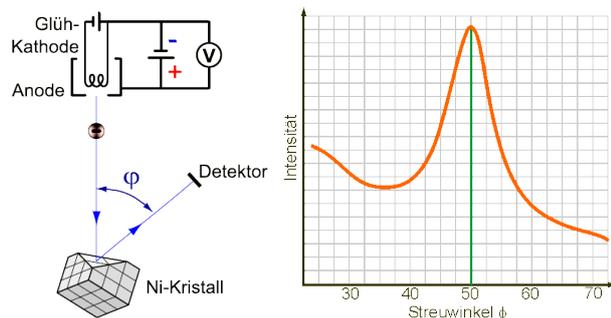


Abbildung 17 Versuchsaufbau von Davisson und Germer (links) und schematische Darstellung der Resultate (rechts). Deutlich ist das Beugungsmaximum 1. Ordnung bei einem Streuwinkel von 50° zu erkennen. Quelle a): www.pctheory.uni-ulm.de

Aufgabe: Bearbeiten Sie nun die [Simulation 20.15](#), welche das Experiment von Davisson und von Germer zum Thema hat.

20.7.1.1 Theoretische Auswertung des Resultats

Wir wollen nun die Ergebnisse dieses Experiments nachvollziehen. Wie kommt es zu dem beobachteten Maximum bei einem Streuwinkel von 50° ? Nur unter einem bestimmten Winkel, dem **GLANZWINKEL** ϑ , kann man offenbar reflektierte Elektronen nachweisen. Dies lässt sich mit der Theorie von einem Elektron als Teilchen nicht erklären, sondern nur mit der Interferenz von Materiewellen. Betrachten wir deshalb für unsere Auswertung mal die Elektronen als Wellen, sogenannte Materiewellen.

Ein Kristall lässt sich als regelmässige Anordnung von Atomen verstehen. Innerhalb dieser Betrachtung kann man einen Kristall auch in sogenannte Netz- oder Gitterebenen aufteilen. In [Abbildung 19](#) ist das Gitter für Graphit schematisch dargestellt.

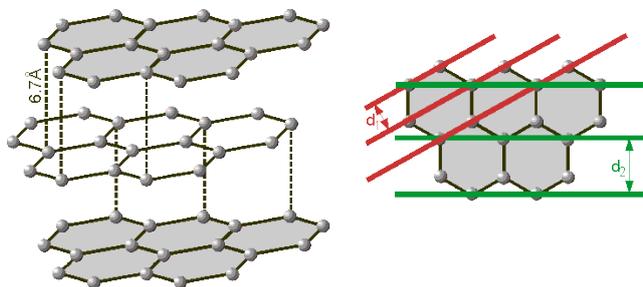


Abbildung 19 Dreidimensionale Darstellung des Graphitgitters mit hervorgehobener Schichtstruktur. Rechts daneben eine Aufsicht auf eine Schicht, mit Visualisierung der Netzebenen. Die Schichtabstände betragen $d_1=123\text{pm}$ und $d_2=213\text{pm}$.

Richtet man einen Elektronenstrahl unter verschiedenen Einfallswinkel auf einen dünnen Kristall, so durchdringt er diesen fast immer. Dabei werden die einfallenden Elektronen am Kristall elastisch gestreut oder reflektiert. Die von benachbarten Ebenen gestreuten Elektronen können miteinander interferieren. Dies ist in [Abbildung 20](#) schematisch dargestellt. Dabei stehen die roten Linien für Richtung der einfallenden, respektive gestreuten Elektronen.

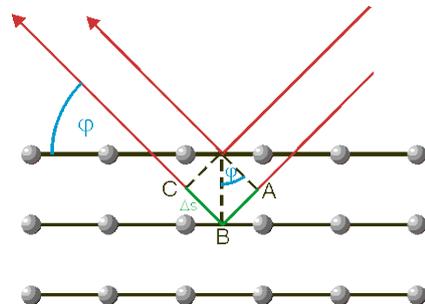


Abbildung 20 Streuung von Elektronen an benachbarten Kristallebenen.

Wie man der Abbildung sehr leicht entnehmen kann, tritt ein Interferenzmaximum dort auf, wo zwei Materiewellen, die an benachbarten Gitterebenen reflektiert werden, den Gangunterschied $\Delta s = n \cdot \lambda$ haben ($n = 1, 2, 3, \dots$).

In der Zeichnung ist der zusätzliche Weg Δs , den ein an der unteren Gitterebene reflektiertes Elektron zurücklegen muss, fett gezeichnet. Dem Dreieck entnehmen wir:

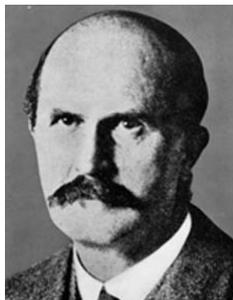


Abbildung 21
William Henry Bragg
(1862-1942).
Quelle: Wikipedia

$$\sin \varphi = \frac{1/2 \Delta s}{d} = \frac{\Delta s}{2d} \Rightarrow \Delta s = 2d \sin \varphi \quad (14)$$

Ersetzt man den Gangunterschied noch nach $\Delta s = n \cdot \lambda$, so erhält man die berühmte **BRAGGSCHES BEZIEHUNG**:

$$n \cdot \lambda = 2d \cdot \sin \varphi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

20.7.1.2 Die Elektronenbeugungsröhre im Schulversuch

Die meisten Schulen verfügen nicht über die technische Ausstattung, eine Richtungsabhängige Intensitätsmessung eines an einer Probe gestreuten Elektronenstrahls durchzuführen. In Schulen verwendet man deshalb für das Experiment meistens eine Elektronenbeugungsröhre mit polykristalliner Graphitprobe (Abbildung 22). Das Prinzip ist einfach: Elektronen dampfen aus dem Heizdraht aus und werden über die Beschleunigungsspannung U_B beschleunigt. Diese treffen auf eine Graphitfolie und werden an den Kristallebenen entsprechend der Bragg-Reflexion gebeugt. Auf dem Schirm entsteht ein Interferenzmuster (Helle Ringe).

Die verwendete Graphitfolie ist polykristallin, besteht also aus Milliarden kleinster Kristalle, von denen statistisch gesehen immer genug die Braggsche Beziehung beim Beschuss der Probe mit einem Elektronenstrahl erfüllen. Dies ist schematisch in **Abbildung 23** gezeigt.

Nach dem Reflexionsgesetz ist der Ablenkwinkel doppelt so gross wie der Glanzwinkel. Er lässt sich aus dem Schirmabstand l und der Ablenkung r berechnen:

$$\tan(2\varphi) = \frac{r}{l} \tag{16}$$

An anderen Kristallen der Folie werden Elektronen um den gleichen Winkel in andere Richtungen abgelenkt. Deshalb erscheint auf dem Fluoreszenzschirm das Interferenzmuster als Kreisring mit Radius r , wie in **Abbildung 24** dargestellt ist.

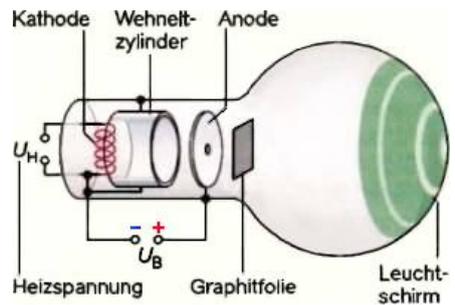


Abbildung 22 Schematische Darstellung einer Elektronenbeugungsröhre.

Quelle: www.pctheory.uni-ulm.de

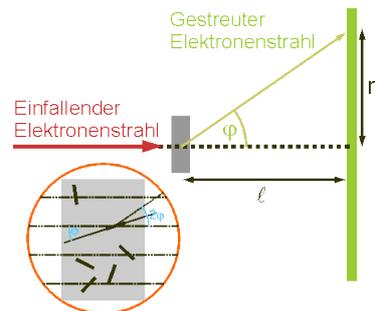


Abbildung 23 Die Beugungsringe entstehen durch Milliarden beugender Kristalle im polykristallinen Material.

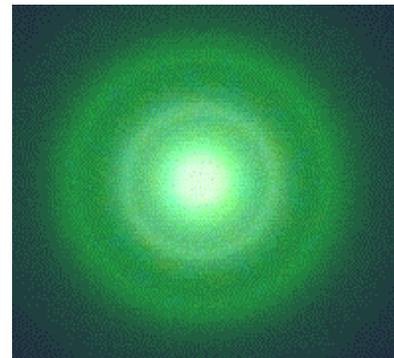


Abbildung 24 Beugungsbild eines Elektronenstrahls an Graphit.

Quelle: www.cip.physik.uni-muenchen.de

20.8 Die Schrödinger – Gleichung

Wenn sich Teilchen als Welle ausbreiten können – so genannten Materiewellen – dann muss man diese Wellen auch durch eine mathematische Funktion beschreiben können. Die allgemeinste Variante dieser Wellenfunktion schreibt man $\Psi(x, y, z, t)$. Diese Funktion wird normalerweise eher komplizierter Natur sein, transportiert eine Materiewelle ja schliesslich nebst Energie und Impuls auch Masse und oft auch noch Ladung. Es gibt in der Physik verschiedene Möglichkeiten für die Funktion einer Materiewelle. Wir wollen hier nur Fälle betrachten, bei denen sich die Raum- von den Zeitvariablen trennen lassen:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t} \quad (17)$$

Dabei ist ω die Kreisfrequenz der Materiewelle. Die Funktion Ψ stellt dabei nur den ortsabhängigen Teil der eigentlich zeitabhängigen Wellenfunktion Ψ dar. Was kann man damit nun anfangen? Nun, die Funktion Ψ beschreibt eine Wahrscheinlichkeitswelle. Oder anders: die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilchen in einem Detektor zu einem bestimmten Zeitpunkt nachgewiesen werden kann, ist proportional zu $|\Psi|^2$. Dies nennt man die Wahrscheinlichkeitsdichte und nur diese hat eine physikalische Bedeutung (nicht Ψ selbst).



Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen an einem Ort im Raum zu einem gewissen Zeitpunkt nachzuweisen, ist proportional zu $|\Psi|^2$ an diesem Raumpunkt.



Abbildung 25: Erwin Schrödinger (1887-1961)
Quelle: unbekannt

Wie erhält man aber die Wellenfunktion? Für Materiewellen hat Erwin Schrödinger (**Abbildung 25**) 1926 die Lösung gefunden. Für dreidimensionale Systeme lautet die zeitunabhängige **SCHRÖDINGERGEICHUNG**

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \cdot \nabla^2 \Psi + U\Psi = E\Psi \quad (18)$$

wobei ∇^2 das Quadrat des sogenannten Nabla-Operators ∇ ist. Man schreibt dafür häufig auch

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (19)$$

Allgemein schreibt man die Schrödinger – Gleichung in der Form

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (20)$$

wobei

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta + U \quad (21)$$

der **HAMILTON-OPERATOR** des Systems ist.

20.8.1 Die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi|^2$

Wie wir bereits bemerkt haben, entspricht das Quadrat der Wellenfunktion $|\Psi|^2$ der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens an einem Ort. Nehmen wir noch einmal die allgemeine Lösung der eindimensionalen, zeitunabhängigen Schrödingergleichung $\Psi = \Psi_0 \cdot e^{ikx}$ zur Hand. Darin wurde lediglich die Konstante Ψ_0 hinzugefügt. Berechnen wir nun die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$|\Psi|^2 = |\Psi_0 \cdot e^{ikx}|^2 = \Psi_0^2 \cdot |e^{ikx}|^2 = \Psi_0^2 \cdot e^{ikx} \cdot e^{ikx*} = \Psi_0^2 \quad (26)$$

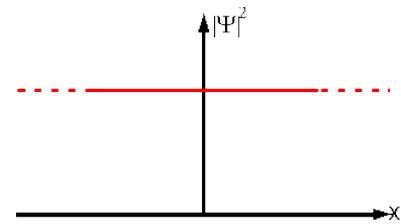


Abbildung 26 Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion des Ortes x.

Abbildung 26 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi|^2$ als Funktion des Ortes. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist für jeden Ort dieselbe – das Teilchen ist an jedem Ort mit gleicher Wahrscheinlichkeit!

20.9 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Abbildung 26 hat weit reichende Konsequenzen! Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte haben wir angenommen, dass k , und somit der Impuls der betrachteten Welle exakt bekannt ist. Dann ist es aber offenbar unmöglich, eine Aussage über den Aufenthaltsort des Teilchens zu machen! Der Physiker Werner Heisenberg (Abbildung 27) hat diese Tatsache 1927 mit seiner berühmten Unbestimmtheitsrelation dargestellt. Sie lautet für eine Dimension



Abbildung 27
Werner Heisenberg (1901-1976). Quelle: Wikipedia



$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \quad (27)$$

und analog auch für die anderen zwei Dimensionen y und z . Dies heisst nichts anderes als:



ES WIRD NIE MÖGLICH SEIN, ORT UND IMPULS EINES TEILCHENS GLEICHZEITIG EXAKT ZU BESTIMMEN! DAS PRODUKT AUS ORTS- UND IMPULSUNSCHÄRFE IST STETS GLEICH ODER

$$\text{GRÖßER } \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} !$$

20.10.1 Das Rastertunnelmikroskop

Beim Rastertunnelmikroskop bringt man eine Metallspitze nahe an die zu untersuchende Oberfläche und legt eine kleine Spannung von etwa 10 mV zwischen Probe und Metallspitze an. Der Abstand der Metallspitze zur Oberfläche stellt dabei für die in der Oberfläche sitzenden Elektronen eine Potentialschwelle dar. Wird der Abstand gering genug (keine Berührung!), so können einige Elektronen durch diese Schwelle hindurchtunneln und so den **TUNNELSTROM** erzeugen (Abbildung 29).

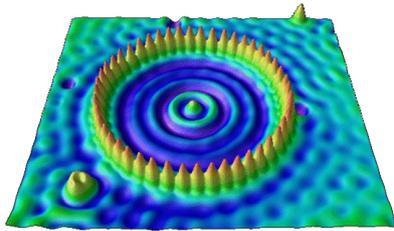
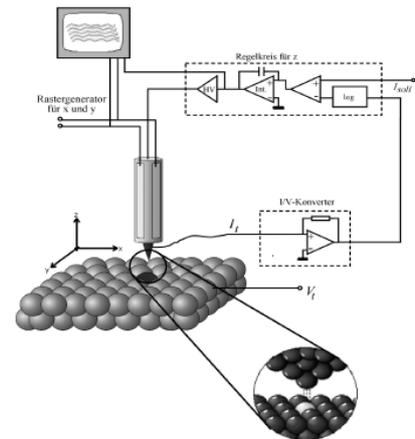


Abbildung 30 Fe – Atome auf einer Ni – Oberfläche. Quelle: IBM

Normalerweise versucht man, diesen Tunnelstrom während des Abfahrens der Oberfläche konstant zu halten. Dadurch bleibt aber auch der Abstand der Metallspitze zur Oberfläche konstant und es entsteht so schliesslich eine Karte der Oberfläche, die man untersucht.

Abbildung 29 Funktionsweise eines RTM. Quelle: www.physik.uni-essen.de

20.11 Atomspektren

Bevor die Quantentheorie entwickelt wurde, konnte die Physik auch eine andere Erscheinung nicht erklären. Es war die Tatsache, dass Spektren von Atomen eine Ansammlung von diskreten Linien darstellten und nicht eine kontinuierliche Emission oder Absorption von Licht zugrunde lag. Das Spektrum von Wasserstoff (Abbildung 31) war bei weitem das einfachste. Bereits 1885 hatte der Schweizer Gymnasiallehrer **JOHANN JAKOB BALMER** erkannt, dass man den sichtbaren Anteil des Wasserstoffspektrums durch eine Formel darstellen konnte, welche nur ganzzahlige Variablen enthält. Sein erkannter Zusammenhang ist heute als Balmer-Formel bekannt:



Abbildung 31 Spektrallinien des Wasserstoffatoms

Bereits 1885 hatte der Schweizer Gymnasiallehrer **JOHANN JAKOB BALMER** erkannt, dass man den sichtbaren Anteil des Wasserstoffspektrums durch eine Formel darstellen konnte, welche nur ganzzahlige Variablen enthält. Sein erkannter Zusammenhang ist heute als Balmer-Formel bekannt:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (29)$$

Dabei ist $R_H = 1.0974 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$ die Rydberg Konstante für Wasserstoff und n eine ganze Zahl grösser gleich 3. 1888 erweiterten der schwedische Physiker Janne Rydberg und der Schweizer Physiker Walter Ritz die Formel zur Rydberg – Ritz Formel zur Berechnung des Wasserstoffspektrums:



$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (30)$$

Dabei sind n_1 und n_2 beliebige ganze positive Zahlen, wobei $n_1 < n_2$ ist. 1908 veröffentlichte Ritz dann das nach ihm benannte Ritzsche Kombinationsprinzip. Danach ist die Summe oder die Differenz der Frequenzen zweier Spektrallinien häufig wieder die Frequenz einer weiteren Spektrallinie.

Die vorhergehenden Arbeiten haben die Komplexität der Erklärung von Atomspektren massiv vereinfacht. Da die Atomspektren selbst mit dem Aufbau der entsprechenden Atome verknüpft sind, musste man nun nur noch ein geeignetes Atommodell finden.

Aufgabe: Bei der roten Linie im Wasserstoffspektrum (vgl. [Abbildung 31](#)) handelt es sich um den Übergang eines Elektrons von $n_2 = 3$ zu $n_1 = 2$. Berechnen Sie die Wellenlänge des Lichts, das dabei frei wird nach Formel (30) und vergleichen Sie sie mit dem experimentell ermittelten Wert.



20.11.1 Das Rutherford'sche Atommodell

1911 konnte der Experimentalphysiker Ernest Rutherford ([Abbildung 32](#)) durch die Auswertung seines berühmten Streuversuchs erstmals begründete Aussagen über die Struktur des Atoms machen.

Der Versuchsaufbau enthält einen radioaktiven α -Strahler und eine extrem dünne Goldfolie, die sich in einer Vakuumkammer befinden. Die von dem Strahler emittierten α -Teilchen werden an der Goldfolie gestreut und treffen anschliessend auf einen Szintillationsschirm, wo sie kleine Lichtblitze hervorrufen. Diese können mit einem Mikroskop beobachtet werden.

Man zählt für jeden Streuwinkel ϑ zwischen 0° und 180° die jeweils eintreffenden α -Teilchen.

α -Teilchen (He-Kerne) sind zweifach positiv geladen und wesentlich schwerer als Elektronen. Rutherford ging – entsprechend dem verbreiteten Thomsonschen Atommodell – zunächst davon aus, dass im Goldatom die positive Ladung gleichmässig verteilt und deshalb deren elektrische Abstossungskraft auf ein α -Teilchen nirgends sehr hoch sei. Auch die leichten Elektronen, die er "wie Rosinen im Teig" der positiven Ladung eingebettet wählte, können die α -Teilchen nicht beeinflussen. Deshalb erwartete er, dass die α -Teilchen durch die Goldatome nicht wesentlich aus ihrer Richtung abgelenkt würden.

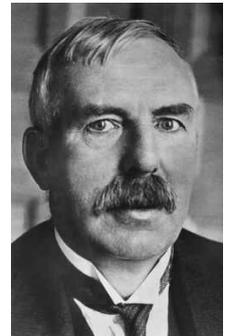


Abbildung 32
Ernest Rutherford
1908. (1871-1937).
Quelle: Wikipedia

Und tatsächlich durchdringen die meisten α -Teilchen die Goldfolie ohne Ablenkung. Zur Überraschung Rutherford's gibt es aber auch welche, die um grosse Winkel ϑ , vereinzelt sogar bis zu 180° , gestreut werden.

Dies kann nur so erklärt werden: Ein solches α -Teilchen ist auf eine positiv geladene Masse gestossen, welche auf ein Gebiet konzentriert ist, das sehr viel kleiner ist als das Atom. Somit ergibt sich:

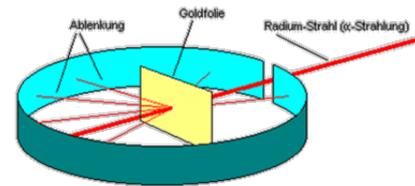


Abbildung 33 Schematische Darstellung des Aufbaus vom Rutherford'schen Streuversuchs. Quelle: www.uniterra.de

- Im Atomkern, dessen Durchmesser nur rund $\frac{1}{100'000}$ des Atomdurchmesser beträgt, sind die positive Ladung und nahezu die gesamte Masse des Atoms konzentriert.
- Die verglichen mit dem Kern fast masselosen Elektronen bilden die **ATOMHÜLLE**. Sie sind negativ geladen und umkreisen wegen der elektrischen Anziehungskraft den Kern, so wie die Planeten die Sonne wegen der Gravitationskraft.

Obwohl es die Streuung von α -Teilchen an einer Goldfolie gut erklärt, steckt dieses Modell doch noch voller Widersprüche:

- Ein Elektron auf einer Kreisbahn wird ständig zum Mittelpunkt des Kreises hin beschleunigt. Vom schwingenden Dipol her weiss man, dass eine beschleunigte Ladung eine elektromagnetische Welle abstrahlt. Das Elektron müsste somit dauernd Energie verlieren. Es könnte sich gar nicht auf der Kreisbahn halten, sondern auf einer Spiralbahn in den Kern stürzen (**Abbildung 34**). Atome sind aber stabil. Das ist mit diesem Modell nicht zu verstehen.
- Auf der Spiralbahn um den Kern würde sich die Umlauffrequenz immer mehr erhöhen. Also würde auch die Frequenz der abgestrahlten elektromagnetischen Welle zunehmen und somit ein kontinuierliches Spektrum erzeugt. In Wirklichkeit sendet ein leuchtendes atomares Gas aber ein Linienspektrum aus, das nur aus einzelnen, deutlich voneinander unterschiedenen Frequenzen besteht. Das Rutherford'sche Modell kann auch dies nicht erklären.

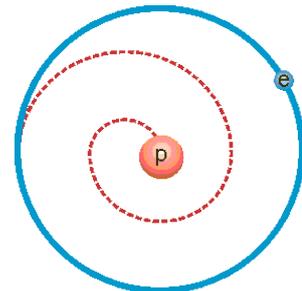


Abbildung 34 Schematische Darstellung des Aufbaus vom Rutherford'schen Streuversuchs. Quelle: www.uniterra.de

20.11.2 Das Bohrsche Atommodell

Der dänische Physiker Nils Bohr (Abbildung 35, Nobelpreis 1922) machte 1913 einen Versuch, Plancks Quantenhypothese mit der klassischen Physik zu vermählen. Es war nicht das, was wir heute unter Quantenmechanik verstehen, aber es war die erste Synthese von Quantentheorie und Mechanik.

Bohr machte sich zum Rutherfordschen Atommodell einige Gedanken. Ihm fiel auf, dass bei einer Berechnung des Abstandes des Elektrons zum Atomkern, basierend auf dem Rutherfordschen Atommodell, keine Grösse mit einer Länge entstehen konnte. Wie auch, in der klassischen Berechnung kommen lediglich die Elementarladung e , die Masse des Elektrons m_e und die Permeabilität des Vakuums ϵ_0 vor. Aus den Einheiten dieser Grössen lässt sich aber keine Grösse mit der Einheit einer Länge bilden. Um dies zu erreichen, müsste noch eine zusätzliche physikalische Grösse mit der Einheit Js vorhanden sein. Dies entspricht jedoch gerade



Abbildung 35 Nils Bohr (1885-1962). Quelle: Wikipedia

der Einheit des planckschen Wirkungsquantums h ! Die Kombination $\frac{\epsilon_0 h^2}{m_e e^2}$ hat die Dimension einer Länge und der Betrag beträgt etwa 0.16 nm, was in etwa vergleichbar mit atomaren Abständen ist.

Bohr entwickelte daraufhin sein Atommodell, in dem in einem Atom ein Satz diskreter, stationärer Elektronenkreisbahnen existiert. Sein Modell fusst dabei auf mehreren Postulaten:

- Das Elektron kreist um den Atomkern auf einer Quantenbahn, die durch einen ganz bestimmten diskreten Energiewert E , gekennzeichnet ist. Es strahlt bei dieser Kreisbewegung keine Energie ab. Für die Bewegung auf einer Quantenbahn gilt eine Quantenbedingung. Das Produkt aus dem Umfang $2\pi \cdot r$ der Kreisbahn und dem Impuls $p = mv$ des Elektrons muss ein ganzzahliges Vielfaches des planckschen Wirkungsquantums h sein, oder $2\pi r \cdot mv = n \cdot h$, wobei $n = 1; 2; 3; \dots$ **QUANTENZAHL** heisst.¹
- Energie wird nur abgestrahlt, wenn ein Elektron von einer Kreisbahn auf eine andere wechselt.
- Geht das Atom von einem Zustand höherer Energie E_2 in einen Zustand niedrigerer Energie E_1 über, so emittiert es ein Photon der Energie $hf = E_2 - E_1$.

Mit diesem Modell hatte Bohr – obwohl einige Probleme bestanden (s. 20.11.2.2) – einen grossen Wurf gemacht. Mit seinem Modell kann man einige Eigenschaften von z.B. Wasserstoffatom berechnen, wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird. Das Wasserstoffatom deshalb, weil es mit einem Proton und einem Elektron das einfachste aller Atome im Periodensystem ist.

¹ DeBroglie fand nachträglich eine Erklärung für diese etwas willkürlich erscheinende Quantenbedingung. Den Kreisbahnen des Elektrons entsprechen Materiewellen, die rund um den Kern laufen. Ist der Bahnumfang $2\pi r$ ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge $\lambda = h/mv$, so entsteht eine stehende Welle, deren Schwingungsform sich im Lauf der Zeit nicht verändert. Dies zeichnet eine Quantenbahn vor allen anderen

denkbaren Kreisbahnen aus! Aus $2\pi r = n \cdot \lambda$ und $\lambda = \frac{h}{mv}$ folgt $2\pi r = n \cdot \frac{h}{mv}$ also die Quantenbedingung

$$2\pi r \cdot mv = n \cdot h.$$

20.11.2.1 Bestätigungen des bohrschen Atommodells

20.11.2.1.1 Atomgrösse – Radien der Elektronenbahnen

Wie weit ist denn nun das Elektron vom Atomkern entfernt? Nun, auch bei Bohr wird das Elektron durch die Coulombkraft zwischen Elektron und dem Atomkern auf seiner Bahn gehalten. Wir machen den altbekannten Ansatz $F_Z = F_{el}$ oder

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \quad (31)$$

Aus der Quantenbedingung $2\pi r \cdot mv = n \cdot h$ bekommt man für die Geschwindigkeit $v = \frac{n \cdot h}{2\pi r m_e}$, welche wir in die letzte Formel einsetzen und nach dem Radius r auflösen. Man erhält



$$r = n^2 \cdot \frac{\epsilon_0 h^2}{m_e \pi e^2} \quad (32)$$

Für n=1 ergibt dieser Ausdruck

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{m_e \pi e^2} \approx 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}, \quad (33)$$

was als bohrscher Atomradius bekannt ist.

Aufgabe: Zeichnen Sie, dass für n=1 in Formel (32) wirklich der Bohrsche Atomradius resultiert.



20.11.2.1.2 Atomspektren

Nachdem wir nun die Abstände eines Elektrons vom Atomkern berechnen können, sollte es doch auch möglich sein, die Energien zu berechnen, die frei werden, wenn ein Elektron von Bahn zu Bahn hüpf.

Für die potentielle Energie eines Elektrons im Coulombfeld eines Wasserstoffkerns gilt in Kombination mit (32)

$$E_{pot} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \left(n^2 \cdot \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \right)} = -\frac{m_e e^4}{4\epsilon_0^2 n^2 h^2} \quad (34)$$

Für die kinetische Energie ergibt sich unter Verwendung von (31) und (32)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 r^2 m_e^2} \right). \quad (35)$$

Hier müssen aber offensichtlich noch ein paar Schritte folgen. Wir ersetzen auch hier den Radius mit $r = n^2 \cdot \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$ und bekommen

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 h^2 e^4 \pi^2 m_e^2}{4\pi^2 m_e n^4 \epsilon_0^2 h^4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^4 m_e}{4\epsilon_0^2 n^2 h^2} \right) = -\frac{1}{2} E_{pot}. \quad (36)$$

Die Energie des Elektrons auf der Bahn n erhalten wir, wenn wir die potentielle und die kinetische Energie zusammenzählen zu

$$E_n = E_{pot} + E_{kin} = E_{pot} - \frac{1}{2} E_{pot} = \frac{1}{2} E_{pot} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2}. \quad (37)$$

Für die Energiedifferenz zweier Elektronenbahnen folgt aus diesem Resultat gleich

$$\Delta E = E_{n_2} - E_{n_1} = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 n_2^2 h^2} + \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 n_1^2 h^2} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (38)$$

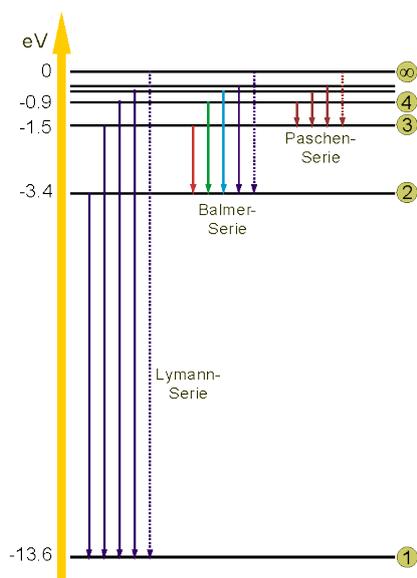
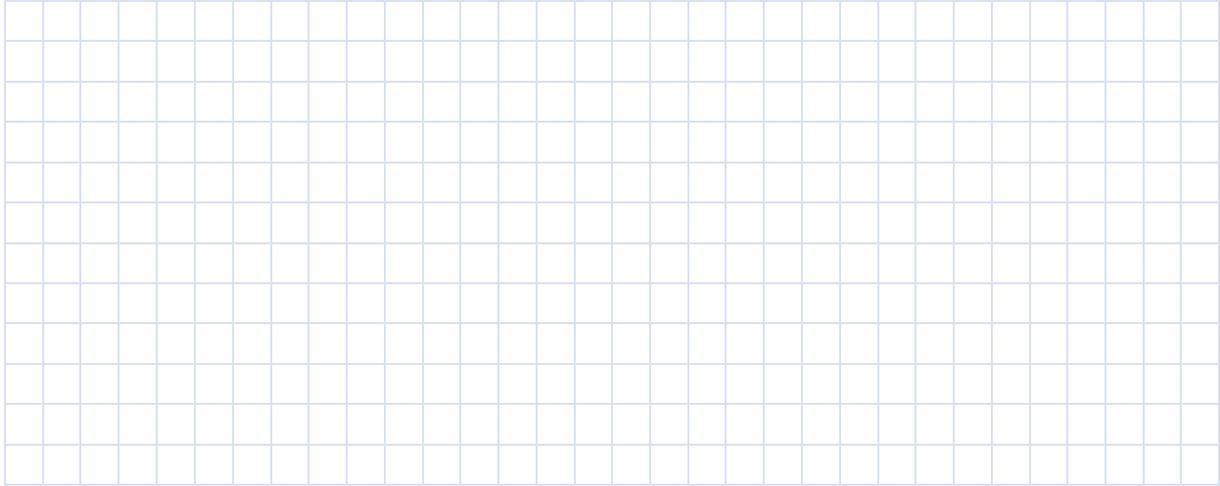


Abbildung 36 Energiestufen des Wasserstoffatoms. Es sind die nach ihren Entdeckern benannten Übergangsserien eingezeichnet (es fehlen die Bracket- und die Pfund-Serie).

Dies ist aber gerade die Rydberg – Ritz Formel (30)! Das bohrsche Atommodell erlaubt also eine Erklärung für eine Formel, welche von Rydberg und Ritz 25 Jahre vorher empirisch aus dem Wasserstoffspektrum abgeleitet worden war! Demnach entsprechen die beobachtbaren Wasserstofflinien Elektronenübergängen zwischen Elektronenbahnen mit unterschiedlicher Quantenzahl n. Nach ihren Entdeckern sind verschiedene Übergangsserien unterschiedlich benannt worden (Abbildung 36). Die Balmer – Serie ist die einzige, welche teilweise sichtbare Übergänge besitzt.

Aufgabe: Indem in Formel (37) $n = 1$ gesetzt wird, erhält man die tiefste mögliche Energie, welche ein Elektron im Wasserstoffatom besetzen kann. Im Umkehrschluss entspricht das genau der Ionisierungsenergie von Wasserstoff. Berechnen Sie mit Hilfe von Formel (37) die Ionisierungsenergie von Wasserstoff und vergleichen Sie das Resultat mit dem Literaturwert.



Aufgabe: Stellen Sie die potentielle Energie (34), die kinetische Energie (35) und die Gesamtenergie für ein Elektron des Wasserstoffs bei $n = 1$ als Funktion vom Abstand r graphisch dar. Benutzen Sie hierzu z.B. Geogebra.

Aufgabe: Mit Hilfe der Java-Simulation "[Neonlicht und andere Entladungslampen](#)" können die Vorgänge, welche zur Emission von Photonen in einem durch Elektronen angeregten Gas führen, einfach nachvollzogen werden. Stelle Sie sicher, dass Sie verstanden haben, wie ein Spektrum zustande kommt und warum es diskrete Linien besitzt.

20.11.2.1.3 Der Franck-Hertz Versuch – Eine weitere Bestätigung

Niels Bohr wurde durch das Auftreten optischer Spektrallinien zu seinem Atommodell veranlasst. Atome gehen in einen anderen Energiezustand über, wenn sie ein Photon emittieren oder absorbieren. Das Atom kann das Photon allerdings nur dann absorbieren, wenn es *genau* die zur Energiedifferenz zwischen beiden Zuständen "passende" Energie hat.

Ein wichtiges Experiment, mit dem die Existenz **DISKRETER ENERGIEZUSTÄNDE** auf andere Weise bestätigt wurde, gelang 1914 James Franck und Gustav Hertz (**Abbildung 37**). Atome können nämlich nicht nur Energie von Photonen, sondern auch von Elektronen absorbieren.

Der Versuch zeigt: Nur wenn das Elektron eine für die Atomart charakteristische Mindestenergie mitbringt, kann es beim Zusammenstoß mit einem Atom Energie an dieses abgeben. Der Stoß versetzt das Atom in einen höheren Energiezustand, der vom Grundzustand durch eine Energiestufe getrennt ist.



Abbildung 37 James Franck (1882-1964) und Gustav Ludwig Hertz (1887-1975) gewannen 1925 den Nobelpreis für Physik. Quelle: www.nobelprize.org

Der Versuchsaufbau enthält einen mit Quecksilberdampf gefüllten Glaskolben, in dem sich drei Elektroden befinden: die Glühkathode K, das Anodengitter A und die Auffängerelektrode B (**Abbildung 38**).

Die aus der Glühkathode austretenden Elektronen werden durch die regelbare Spannung U_b bis zum Anodengitter A beschleunigt und müssen anschliessend bis zur Auffängerelektrode B gegen eine geringe Bremsspannung U_G anlaufen.

Man variiert die Beschleunigungsspannung U_b , misst den in der Auffängerelektrode B eintreffenden Elektronenstrom I und erhält als Resultat **Abbildung 39**. Wie erklärt sich dieser Verlauf?

Beim Quecksilberatom beträgt die Differenz zwischen der Energie E_0 des Grundzustands und der Energie E_1 des niedrigsten angeregten Zustands $\Delta E = E_1 - E_0 = 4.9 \text{ eV}$. Bei einer Beschleunigungsspannung unter 4.9 V ist die kinetische Energie der Elektronen geringer als 4.9 eV. Zwischen den Elektronen und den Quecksilberatomen können nur *elastische* Stöße, also Stöße ohne Energieaustausch, stattfinden. Mit zunehmender Spannung U_b erreichen pro Zeiteinheit immer mehr Elektronen das Anodengitter A. Alle besitzen genug Energie, die Bremsspannung U_b , zu überwinden, der Strom I steigt an.

Bei einer Beschleunigungsspannung knapp oberhalb 4.9 V haben die Elektronen unmittelbar vor dem Anodengitter A eine kinetische Energie knapp über 4.9 eV. Dort finden jetzt *inelastische* Stöße statt: Die Elektronen geben 4.9 eV als Anregungsenergie an die Quecksilberatome ab. Mit der ihnen verbleibenden geringen kinetischen Energie können sie nicht mehr gegen

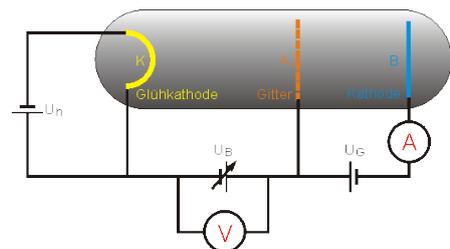


Abbildung 38 Aufbau des Franck – Hertz Versuchs in einer schematischen Darstellung.

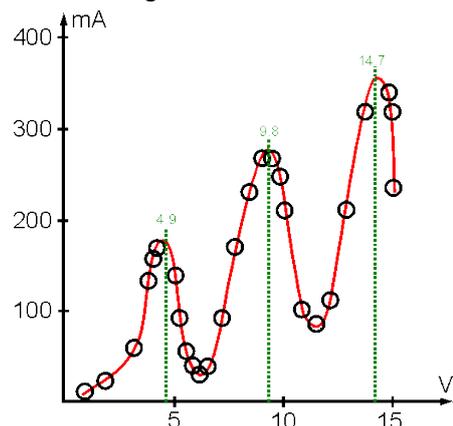


Abbildung 39 Elektronenstrom als Funktion der Beschleunigungsspannung beim Franck-Hertz-Versuch.

die Bremsspannung U_b , anlaufen. Sie fallen für die Strommessung aus. Der Strom I fällt stark ab.

Bei einem weiteren Anstieg der Beschleunigungsspannung deutlich über 4.9 V hinaus erreichen die Elektronen die kinetische Energie 4.9 eV schon immer weiter vor dem Anodengitter. Das Gebiet, in dem die inelastischen Stösse stattfinden, bewegt sich vom Anodengitter A auf die Glühkathode K zu. Zwischen diesem Gebiet und dem Anodengitter werden die beim Stoss abgebremsten Elektronen noch einmal beschleunigt. Der Strom I steigt also wieder an.

Bei einer Beschleunigungsspannung knapp oberhalb 9.8 V können die Elektronen bereits in der Mitte zwischen der Glühkathode K und dem Anodengitter A den ersten inelastischen Stoss durchführen und dabei 4.9 eV abgeben. Danach werden sie erneut beschleunigt und erreichen unmittelbar vor dem Anodengitter noch einmal die kinetische Energie 4.9 eV. Sie können einen zweiten inelastischen Stoss durchführen. Der Strom I fällt deshalb wiederum stark ab.

Ein durch inelastischen Elektronenstoss angeregtes Quecksilberatom kehrt aus dem ersten angeregten Zustand durch Emission eines Photons der Energie $hf = 4.9$ eV in den Grundzustand zurück.

Aufgabe: Und wenn diese Ausführungen nun völlig unverständlich waren, findet mit der Simulation "[Franck-Hertz](#)" eine sehr gute Möglichkeit, das Zustandekommen des Stroms als Funktion der Beschleunigungsspannung genauer zu betrachten.

Der Franck – Hertz Versuch bestätigt auf schöne Weise ebenfalls das bohrsche Atommodell, da er nur erklärt werden kann, wenn man davon ausgeht, dass sich Elektronen nur in bestimmten Abständen um den Atomkern aufhalten dürfen.

Aufgabe: Bearbeiten Sie die Simulation zum Laser in Abschnitt 20.16

20.11.2.2 Probleme des Modells von Bohr

Wir wollen es nicht verschweigen: auch das bohrsche Atommodell hat bereits zur Zeit seiner Veröffentlichung mit Problemen zu kämpfen. Hier nur ein paar davon:

- Die Postulate lassen sich nicht physikalisch herleiten – ihr Erfolg legitimiert die zugrunde liegenden Annahmen!
- Das Vorhandensein chemischer Bindungen erklärt das Modell nicht.
- Bei Atomen mit mehr als einem Elektron kann das Modell die Linienspektren nicht mehr vorhersagen.
- Die Annahme von scharf definierten Elektronenbahnen widerspricht der heisenbergschen Unschärferelation.

In den folgenden Jahren wurde das bohrsche Atommodell immer wieder angepasst und verfeinert, um seine Unzulänglichkeiten zu kompensieren. Mit dem Aufschwung der Quantenmechanik wurde das Modell aber schlussendlich abgelöst.

20.12 Die Schrödingergleichung – Anwendungen

Als Abschluss dieser Einführung in die Quantenphysik – wobei wir uns eigentlich bisher nur deren geschichtliche Entwicklung angesehen haben – wollen wir doch noch ein paar Konsequenzen betrachten, die sich durch die Anwendung der Schrödingergleichung ergeben. Sie werden feststellen, dass die an ihre mathematischen Fähigkeiten gestellten Ansprüchen dabei von minimal bis extrem reichen, je nach Problemstellung. Aber alles halb so wild...

20.12.1 Das Elektron in der Falle

In einem ersten Beispiel berauben wir ein Elektron seiner Freiheit und sperren es in einen Kasten, in dem es sich nur nach links oder nach rechts bewegen kann. Solche Elektronenfallen sind technisch zu realisieren. Wir interessieren uns aber im Moment nur für die theoretische Seite.

Die [Abbildung 40](#) zeigt den Verlauf des vom Elektron gesehenen Potentials als Funktion des Ortes. An den Orten $x=0$ und $x=L$ soll die Potentialschwelle für das Elektron unendlich hoch sein (entspricht einer unendlich negativ geladenen Wand). Das Elektron wird also nicht in diese Wand eindringen können. Das Elektron befindet sich in einem "Kasten". Es kann sich darin frei bewegen, aber es kann nicht in die "Wände" eindringen.

Somit kann man aber die Wellenfunktion für die Bereiche $x<0$ und $x>L$ gerade aufschreiben²

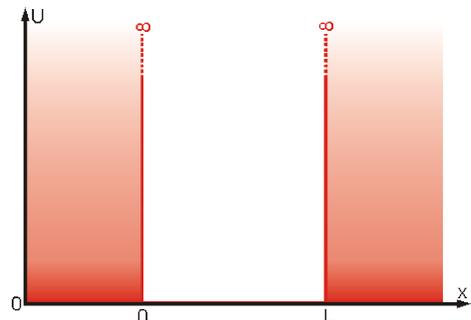


Abbildung 40 Ein Teilchen im unendlich hohen Potentialtopf.

$$\psi = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = L$$

Die Schrödingergleichung (22) für den Bereich innerhalb der Begrenzungen lautet dann

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi. \quad (39)$$

Folgende allgemeine Funktion löst diese Gleichung (sie kennen sie bereits):

$$\psi = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx, \text{ mit } E = \frac{k^2 \hbar^2}{2m}.$$

Wir müssen nun nur noch überprüfen, welche Möglichkeiten auf unsere Problemstellung zutreffen. Also, bei $x=0$ folgt $\psi(0)=B$. Die Randbedingung verlangt aber ebenfalls $\psi(0)=0$, wodurch automatisch $B=0$ folgt. Die gesuchte Wellenfunktion hat also die Form

$$\psi = A \cdot \sin kx \quad (40)$$

² Wir haben dies nicht bewiesen, man kann die Gültigkeit aber einfach zeigen. Glauben Sie es an dieser Stelle einfach!

Die Amplitude beträgt an der Wand $\psi(L) = A \cdot \sin kL$. Die zweite Randbedingung verlangt aber wieder $\psi(L) = 0$. Wir könnten nun einfach $A = 0$ setzen, dann wäre aber die Wellenfunktion immer null, was der Situation entsprechen würde, dass das Teilchen gar nicht im Kasten wäre. Wir müssen uns etwas anderes einfallen lassen. Die zweite Möglichkeit die Randbedingung zu erfüllen ist, das Argument des Sinus bei $x = L$ null werden zu lassen. Dies kann man erreichen, wenn man als Werte von kL nur ganzzahlige Vielfache von π zulässt: $k \cdot L = n \cdot \pi$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$. Damit lautet unsere Wellenfunktion dann

$$\psi = A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (41)$$

mit den Energieeigenwerten

$$E = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \quad (42)$$

Wir sind aber noch nicht am Ende. Die Wellenfunktion muss noch normiert werden (Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Teilchen im gesamten Kasten muss 1 betragen). Tun wir das, so erhalten wir einen Ausdruck für A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx = 1 = A^2 \cdot \int_0^L \sin^2 kx dx = \frac{A^2 L}{2} \quad (43)$$

oder

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (44)$$

Die komplette Lösung unseres Problems lautet damit



Energien: $E = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$

Wellenfunktion: $\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$.

20.12.1.1 Die Nullpunktsenergie

Betrachten wir einmal die Energieeigenwerte (42) etwas genauer. Da, wie bereits bemerkt, $n=0$ keine Lösung sein darf, besitzt ein eingeschlossenes Teilchen immer eine Energie, die grösser ist als null. Der tiefste dazugehörige Energieeigenwert nennt man **NULLPUNKTENERGIE**. Jedes Teilchen, das bezüglich seiner Bewegung Beschränkungen unterliegt, besitzt im Minimum diese Nullpunktsenergie, welche immer grösser als null ist! Das ist ein weiterer Grund dafür, dass der absolute Nullpunkt nicht erreicht werden kann.

20.12.2 Der α -Zerfall

Im Normalfall sind die Potentialwände nicht unendlich hoch. Betrachten wir einmal die Situation des α -Strahlers ^{212}Po , mit einer Halbwertszeit von $0.3\mu\text{s}$ und einer Energie des abgestrahlten α -Teilchens von 8.785MeV . Die anziehenden Kernkräfte sollen genau dann ihre Wirkung verlieren, wenn sich das entstandene α -Teilchen ($A=4$) und der Rest des Kerns ($A=208$) noch berühren (Abbildung 41). Dies ist der Fall bei einem Abstand r von³

$$d = 1.2 \left\{ 4^{1/3} + 208^{1/3} \right\} = 9.1 \text{ fm} .$$

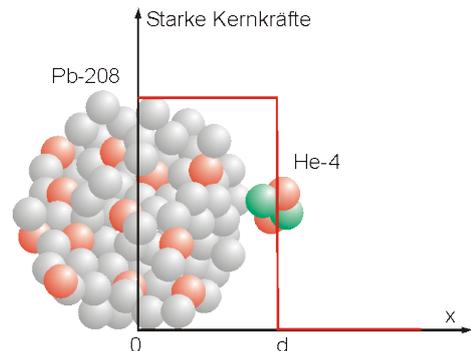


Abbildung 41 In Polonium-212 ist ein Helium-4 Kern im Potentialtopf eines Blei-208 -Kerns gebunden.

In diesem Abstand besitzt das Coulomb – Potential den Wert

$$U = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot (Z-2) e^2}{r} = \frac{2 \cdot (Z-2) \cdot 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{r [\text{fm}]} = \frac{2 \cdot 82 \cdot 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{9.1 \text{ fm}} = 26.2 \text{ MeV} ,$$

wobei mit $Z-2$ die Kernladung des verbleibenden Kerns gemeint ist. Das Potential erreicht in einem Abstand von $r = 26.9 \text{ fm}$ die Energie des alpha – Teilchens von 11.65 MeV . Die Breite der Potentialschwelle beträgt also $b = 26.9 \text{ fm} - 9.1 \text{ fm} = 17.8 \text{ fm}$.

Fazit: das α -Teilchen hat zuwenig Energie, um über die Potentialbarriere zu gelangen. Dass ^{212}Po überhaupt ein α -Strahler ist, hängt damit zusammen, dass die α -Teilchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere hindurch tunneln können (Abbildung 42). Bei ^{212}Po beträgt die Wahrscheinlichkeit etwa $2.5 \cdot 10^{-15}$. Ein α -Teilchen mit einer Energie von 8.785 MeV besitzt eine Geschwindigkeit von $v = 2.371 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und trifft damit mit einer Frequenz von $f = \frac{v}{2d} \approx 1.3 \cdot 10^{21} \frac{1}{\text{s}}$ gegen die Potentialbarriere. Daraus lässt sich die Halbwertszeit von

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{2.5 \cdot 10^{-15} \cdot 1.3 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1}} = 0.25 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

berechnen, was dem beobachteten Wert von $0.3 \mu\text{s}$ ziemlich nahe kommt. Es bleibt allerdings zu erwähnen, dass die Sache nicht immer so gut herauskommt, wie in diesem Beispiel⁴.

³ Erinnern Sie sich an die Kernphysik? Der Radius eines Atomkerns lässt sich nach $r_K = r_0 \cdot A^{1/3}$ berechnen, wobei $r_0 = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1.2 \text{ fm}$ ist.

⁴ Sie können unter <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/nuclear/alphdet2.html#c1> selbst verschiedene Isotope durchrechnen.

Allerdings ist man nun in der Lage, unterschiedliche Zerfallszeiten zu diskutieren. So hat z.B. ^{238}U eine Halbwertszeit von $T_{1/2} = 4.5 \cdot 10^9 \text{ y}$ und das α -Teilchen eine Energie von 4.2 MeV. Bei ^{228}U beträgt die Halbwertszeit $T_{1/2} = 9.1 \text{ min}$ und das α -Teilchen hat eine Energie von 6.7 MeV. Für beide Isotope beträgt die Höhe der Potentialbarriere knapp 30 MeV. Während die Energie des α -Teilchens der Barriere für ^{228}U nur etwa 60% höher ist, verringert sich die Breite der Potentialbarriere bei ^{228}U um etwa den Faktor 2. Dies hat aber bereits eine Verkürzung der Halbwertszeit um den Faktor $3 \cdot 10^{14}$ zur Folge!

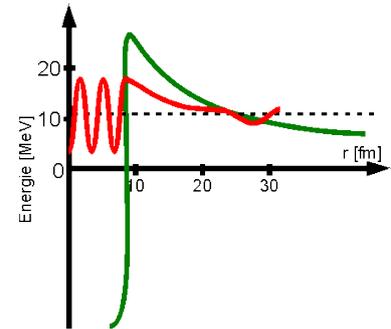
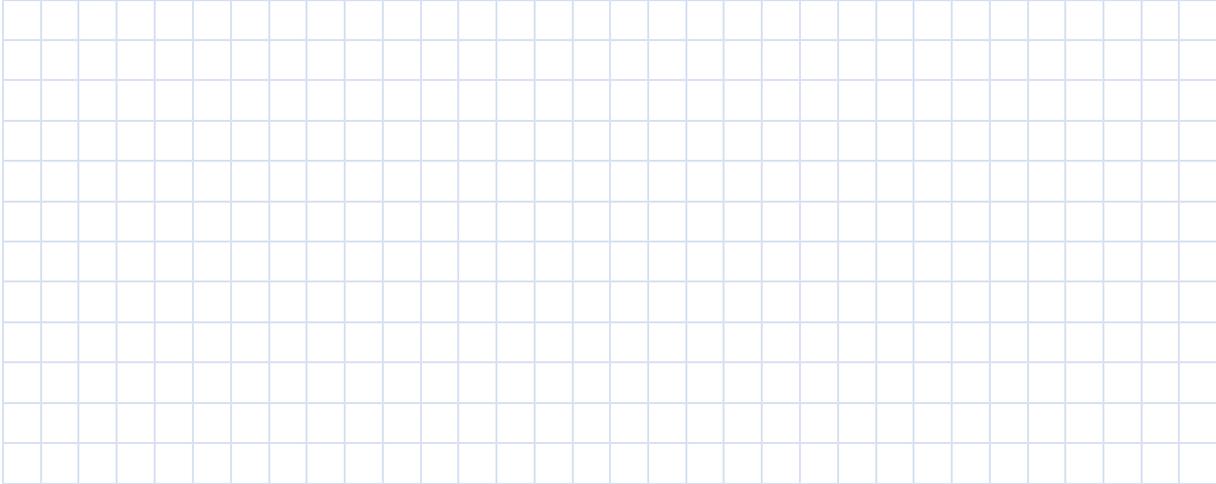


Abbildung 42 Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit kann das α -Teilchen durch die Potentialbarriere hindurchtunneln – es kommt zum Zerfall.

3. Suchen Sie im Internet nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz. Wie sieht der Vergleich mit Ihrem Resultat aus? Wie gross sind absoluter und relativer Fehler in %?



Teil II – Ein Modell für den Photoeffekt finden

4) Beschreiben Sie die drei Graphen, welche in der Simulation gezeigt werden, indem Sie die folgende Tabelle ausfüllen.

Graph	Zusammenhang	Erklärung (physikalische Sprache)
Strom vs. Batteriespannung		
Strom vs. Lichtintensität		
Elektronenenergie vs. Lichtfrequenz		

5) Auf dem Weg zum mathematischen Modell:

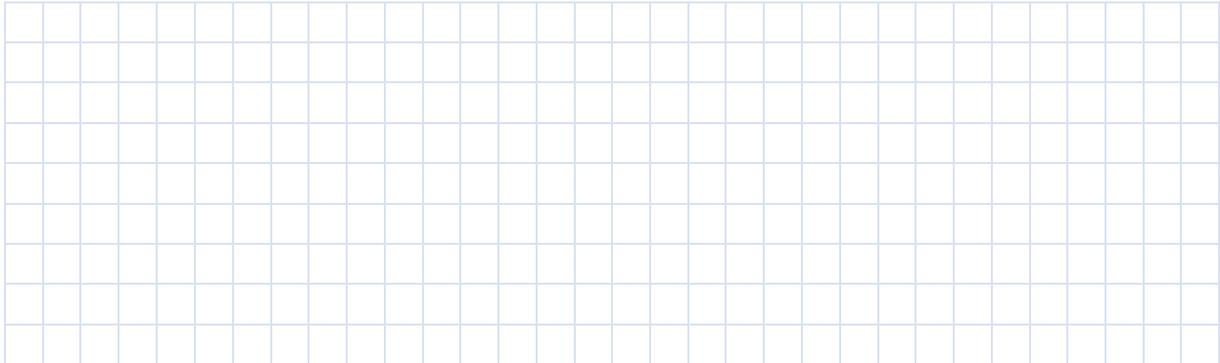
Ausgewähltes Metall: _____

Wellenlänge(nm)	Frequenz (Hz)	Elektronen Bremsspannung [V]	Maximale Kinetische Energie der herausgelösten Elektronen (eV)

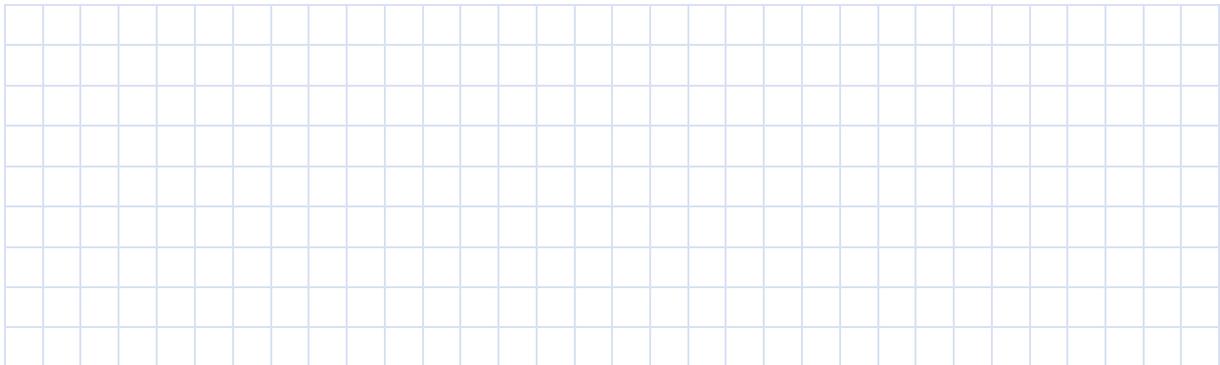
Auswertung

Erstellen Sie in LoggerPro® ein Diagramm, in dem die maximale kinetische Energie der Elektronen gegen die Frequenz des Lichts aufgetragen ist. Ergänzen Sie es mit einer Regressionsgeraden ("lineare Anpassung").

Welche Werte und welche physikalische Bedeutung haben die Parameter der Regressionsgeraden?



Schlagen Sie eine mathematische Gleichung für den Photoeffekt vor. Dies soll auf der Basis der Begriffe "Arbeit", "einfallendes Licht" und "maximale kinetische Energie der Photoelektronen" geschehen.



Aufgabe

Gehen Sie zum Reiter "Einzelatom (Absorption und Emission)". Dieses Setup wird Ihnen eine generelle Idee zum Verhalten der Atome im Zusammenhang mit Energieniveaus liefern.

- Erhöhen Sie die Intensität der Lampe unter Beibehaltung aller anderen Voreinstellungen. Variieren Sie die Wellenlänge des Lichts.
Was ist bezüglich der Energie nötig, damit ein Photon absorbiert wird?
- Drücken Sie "Alles zurücksetzen". Setzen Sie die Lampe auf eine geringe Intensität, sodass das Atom die Zeit bekommt, in den Grundzustand zurückzukehren.
Was beobachten Sie bezüglich Richtung und Art der Emission?
- Erhöhen Sie die Intensität der Lampe, sodass die Photonen das Atom treffen, während es bereits angeregt ist.
Was beobachten Sie bezüglich der Emission und ihrer Richtung?
- Die Lebensdauer steht für die Zeitdauer, bevor ein angeregtes Atom über spontane Emission wieder in den Grundzustand zurückgeht. Setzen Sie die Lichtintensität in einen mittleren Bereich. Ändern Sie die Lebensdauer des Energieniveaus.
Was ist zu beobachten, wenn die Lebensdauer erhöht wird? Was, wenn die Lebensdauer verringert wird?
- Setzen wir alle Beobachtungen zusammen. Umkreisen Sie in den folgenden Angaben diejenigen, welche die Wahrscheinlichkeit erhöhen, dass ein angeregtes Atom eine stimulierte Emission machen wird:
 - Erhöhung / Erniedrigung der Lebenszeit des angeregten Zustands
 - Erhöhung / Erniedrigung der Lampenintensität
 - Die Lampe muss eine höhere / tiefere Wellenlänge / die gleiche Wellenlänge aufweisen als / wie die Energiedifferenz zwischen tieferem und höherem Energieniveau des Atoms.

Ändern Sie die Einstellungen nun zu **drei** Energieniveaus.

- *Welchen Effekt hat das Licht der zweiten Lampe? Kann die zweite Lampe die Atome dazu bringen, Photonen vom selben Energieniveau zu emittieren wie die erste Lampe?*
Stellen Sie die Intensität der ersten Lampe auf null. Die zweite Lampe soll auf ihrem Initialwert (blau) stehen. Beobachten Sie die Absorptions- und die Emissionsprozesse. Beschreiben Sie kurz die Unterschiede zwischen zwei und drei Energieniveaus.
Schalten Sie beide Lampen ein und beschreiben Sie, wie die stimulierte Emission erzeugt wird und welche Richtung sie hat.

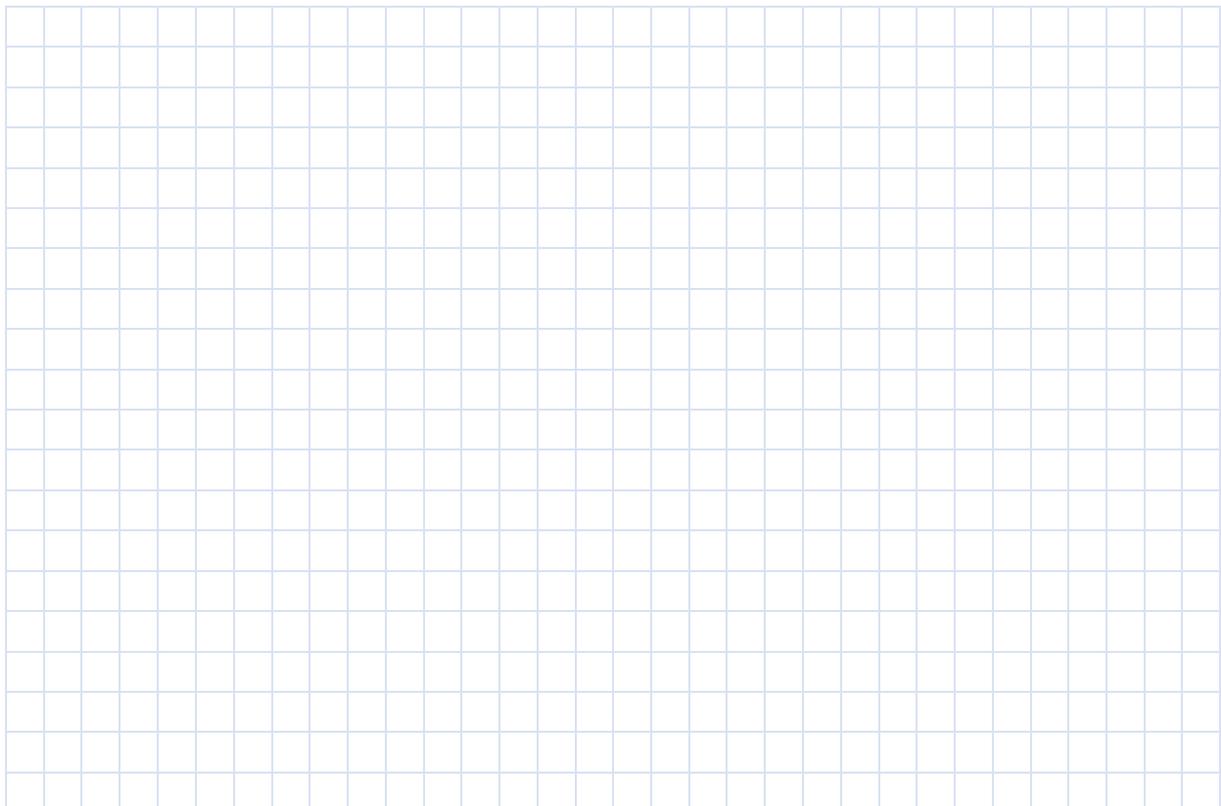
Wie Sie vielleicht bereits herausgefunden haben, reicht ein Atom nicht aus, um einen Laser zu starten. Erst die Produktion vieler Photonen aus stimulierter Emission erzeugt einen Laser. Mehrere Atome werden benötigt, damit es zu einer Lawine von angeregten Elektronen und stimulierter Emission kommt. Wählen Sie somit nun den Reiter "Mehrere Atome (Lasing)" der Simulation.

- *Starten Sie den Pumpvorgang durch Erhöhung der Intensität der Lampen. Was beobachten Sie bezüglich der stimulierten Photonen?*

- Die vorherige Einstellung (Einzelatom) hatte zwei Lichtquellen, währenddem die neue nur eine Lichtquelle hat.
Was wirkt als zweite Lichtquelle in der aktuellen Simulation?
- Um einen stabilen Laser zu bauen, muss die interne Leistung innerhalb des grünen Bereichs "Lasing" liegen.
Welche Probleme sind zu erkennen, dass das vorliegende Setting nicht ideal für einen Laser ist?
- Um häufigere stimulierte Emission zu erzeugen als spontane Emission, muss die Lebensdauer der Energielevels angepasst werden.
Wie genau muss die Lebensdauer angepasst werden?

Durch das Pumpen von Energie in das System kann eine **Besetzungsinversion** erreicht werden. Das bedeutet, dass eine Gruppe von Atomen oder Molekülen existiert, bei der mehr Mitglieder im angeregten Zustand sind als im Grundzustand.

- *Können Sie mit dem vorliegenden Setting eine **Besetzungsinversion** erreichen? Warum oder warum nicht?*
- Fügen Sie dem Setting nun Spiegel hinzu. Die Reflektivität soll 100% (Transmission 0%) betragen. *Versuchen Sie verschiedene Einstellungen. Was passiert? Wozu dient der Spiegel?*
- *Wie muss die Transmission eines der Spiegel eingestellt sein, damit der Laserprozess in Gang kommt?*
- *Ändern Sie die Ansicht des niedrigeren Übergangs zu "Wellenansicht". Was beobachten Sie bezüglich der Amplitude der Welle? Erklären Sie den Unterschied innerhalb und ausserhalb der Spiegel.*
- *Welches Setting haben Sie gebraucht, um einen stabilen Laser zu erreichen?*



20.17 Aufgaben

- 1)
 - a) Skizzieren und beschreiben Sie den Aufbau einer Vakuumfotозelle und erklären Sie deren Funktionsweise.
 - b) Warum muss die Fotозelle evakuiert sein?
 - c) In der Physik wird zwischen innerem und äusserem Fotoeffekt unterschieden. Worin besteht der Unterschied?
- 2) Parallel zu einer Fotозelle wird ein Kondensator geschaltet. Anschliessend wird sie auf unterschiedliche Arten beleuchtet. Skizzieren Sie in einem einzigen $U(t)$ -Diagramm die angegebenen Fälle. Sorgen Sie dafür, dass die einzelnen Graphen in sich konsistent sind – die absoluten Werte sind nebensächlich. Zu Beginn einer Bestrahlung wird der Kondensator immer erst vollständig entladen.
 - a) Die Fotозelle wird mit gelbem Licht hoher Intensität beleuchtet.
 - b) Die Fotозelle wird schwach mit gelbem Licht beleuchtet.
 - c) Die Fotозelle wird mit schwachem UV-Licht bestrahlt.
 - d) Die Fotозelle wird mit UV-Licht hoher Intensität bestrahlt.
- 3) Eine Fotозelle wird in zwei Versuchen mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda_1 = 350 \text{ nm}$ bzw. $\lambda_2 = 250 \text{ nm}$ bestrahlt. Durch Anlegen einer Gegenspannung von $U_1 = 3.55 \text{ V}$ bzw. $U_2 = 4.97 \text{ V}$ wird der Fotostrom vollständig kompensiert. Berechnen Sie aus den Angaben die Planck'sche Konstante.
- 4) Wieder geht es um den Fotoeffekt:
 - a) Wie gross ist die Austrittsarbeit einer Fotokathode, wenn bei Bestrahlung mit Licht der Wellenlänge 220 nm der Fotoeffekt durch eine Gegenspannung von 1.85 V vollständig unterdrückt wird?
 - b) Aus einer Silberfläche, die mit monochromatischem Licht der Wellenlänge 150 nm beleuchtet wird, werden Fotoelektronen ausgelöst. Die Wellenlänge, unterhalb der bei Silber der lichtelektrische Effekt einsetzt, ist 260 nm . Wie gross ist die Geschwindigkeit der herausgelösten Elektronen?
- 5) Das gelbe Licht einer Natriumlampe ist bei einer Wellenlänge von 589 nm am hellsten. Welche Energie haben die Photonen bei dieser Wellenlänge?
- 6) Ein Helium-Neon Laser emittiert rotes Licht bei einer Wellenlänge von $\lambda = 633 \text{ nm}$ in einem Lichtstrahl von 3.5 mm Durchmesser und bei einer Energieemissionsrate von 5.5 mW . Der gesamte Strahl werde von einem Detektor absorbiert. Mit welcher Rate absorbiert der Detektor Photonen?
- 7) Unter idealen Bedingungen kann der Mensch bereits eine visuelle Wahrnehmung haben, wenn Licht der Wellenlänge 550 nm von der Netzhaut des Auges mit einer Rate von rund 100 Photonen pro Sekunde aufgenommen wird. Wie gross ist die zugehörige Energieabsorptionsrate der Netzhaut?
- 8) Welchen Energiebetrag können Radiostrahlung ($\lambda = 200 \text{ m}$), Infrarotstrahlung ($\lambda = 10^6 \text{ m}$) und Röntgenstrahlung ($\lambda = 10^{-8} \text{ m}$) an ein Elektron übertragen?
- 9) Natriumatome emittieren oder absorbieren Strahlung der Wellenlänge $\lambda = 5.9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Berechnen Sie die Energie der Photonen
- 10) Eine Diode weist eine Durchlassspannung von $U_0 = 0,65 \text{ V}$ auf. Welche Wellenlänge hat das von der Diode abgestrahlte Licht?
- 11) Eine Leuchtdiode für 950 nm leuchtet trotz der Stromstärke 10 mA nicht. Welche Einsatzspannung ist bei dieser Wellenlänge zu erwarten? Warum ist kein Leuchten festzustellen?

- 12) Die Frequenz der einfallenden Strahlung beträgt bei einem Compton-Prozess $f = 1.2 \cdot 10^{20}$ Hz. Wie groß ist die Frequenz der gestreuten Strahlung, wenn die Geschwindigkeit der Elektronen nach dem Stoss $v = 1.5 \cdot 10^8$ m/s ist?
- 13) Bei einem Streuexperiment mit Gammaquanten an freien Elektronen tritt eine Wellenlängenänderung der Strahlung von $\Delta\lambda = 1.21 \cdot 10^{-12}$ m auf. Unter welchem Winkel φ werden die gestreuten Gammaquanten beobachtet?
- 14) Wie gross war die Wellenlänge eines Tennisballs, der von Greg Rusedski während ATP Champions Cup in Indian Wells am 14. März 1998 mit 239.8 km/h aufgeschlagen worden war? Die Masse eines Tennisballs beträgt 57 g.
- 15) Ein anfänglich ruhendes Elektron durchläuft die Beschleunigungsspannung U . Welche de-Broglie Wellenlänge (in nm) muss dem beschleunigten Elektron zugeordnet werden?
- 16) Welche de-Broglie Wellenlänge weisen mit 500 kV beschleunigte Protonen auf? Warum haben gleich schnelle neutrale H-Atome (fast) die gleiche Wellenlänge?
- 17) In einem Experiment mit einer Elektronenbeugungsröhre werden Elektronen mit einer Spannung von 5 kV beschleunigt. Der Netzebenenabstand des Graphitkristalls im Elektronenstrahl beträgt $a = 2.13 \cdot 10^{-10}$ m. Der Abstand des Kristalls vom Schirm ist $l = 13$ cm. Der Durchmesser eines Beugungsrings wurde zu $d = 2.15 \cdot 10^{-2}$ cm gemessen. Berechnen Sie aus diesen Angaben das Planck'sche Wirkungsquantum h .
- 18) Wie schnell müsste ein Radfahrer ($m = 80$ kg) durch das Baseltor ($\Delta x \cong 3.0$ m) fahren, damit er aufgrund der Impulsunschärfe in erster Ordnung um 10° aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird?
- 19) Wie gross ist die minimale Geschwindigkeitsunschärfe einer Kugel der Masse 500g deren Ort auf 10^{-6} m genau bekannt ist?
- 20) Wie gross ist die minimale Ortsunschärfe einer Kugel von 5g, deren Geschwindigkeit zwischen 350.000001 m/s und 350.00000 m/s liegt?
- 21) Ein 0.10 mm breiter Spalt wird mit dem Licht eines He-Ne-Lasers senkrecht beleuchtet. Er hat die Wellenlänge $\lambda = 633$ nm. Das Licht trifft 3.0 m hinter dem Spalt auf einen Schirm.
- Berechne den Impuls p eines Photons vor dem Spalt.
 - Im Spalt wird der Ort eines Photons auf $\Delta x = 0.10$ mm festgelegt. Schätze mit der Unschärfere-lation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar$ den Winkel α ab, unter dem das Interferenzminimum erster Ordnung erscheint.
 - Berechne die Breite des Beugungsflecks auf dem Schirm, der durch die beiden Minima erster Ordnung begrenzt wird.
- 22) Der Aufenthaltsort eines Elektrons im Atom ist auf den Bereich der Atomhülle mit dem (ungefähren) Durchmesser $\Delta x = 0.1$ nm beschränkt. Aus der Unschärfere-lation folgt, dass das Elektron durch die Einschliessung in einem so kleinen Raumbereich zu einer Bewegung gezwungen wird. Genauer gesagt: die durchschnittliche kinetische Energie des Elektrons kann nicht null sein. Es existiert also ein Minimalwert der kinetischen Energie $E_{k,m}$, der als **Nullpunktenergie** des Elektrons bezeichnet wird. Dieser Minimalwert lässt sich in erster Näherung berechnen, wenn man annimmt, dass das Elektron in einem eindimensionalen Bereich der Länge 0.10 nm eingeschlossen ist. Dieser Bereich stellt die Ortsunschärfe dar.
- Berechnen Sie über die Heisenberg'sche Unschärfere-lation den Minimalimpuls $p_{min} = \Delta p$ des Elektrons (Minimalimpuls = Impulsunschärfe).
 - Berechnen Sie daraus die Nullpunktenergie des Elektrons.
- 23) Im Wasserstoffemissionsspektrum sind Linien bei folgenden Wellenzahlen zu beobachten: 82259, 97492, 102824, 105292, 106632 und 107440 cm^{-1} . Berechnen Sie daraus die Rydberg Konstante! Hinweis: Wellenzahl bezeichnet den Kehrwert der Wellenlänge. Die Wellenzahl wird in cm^{-1} angegeben.

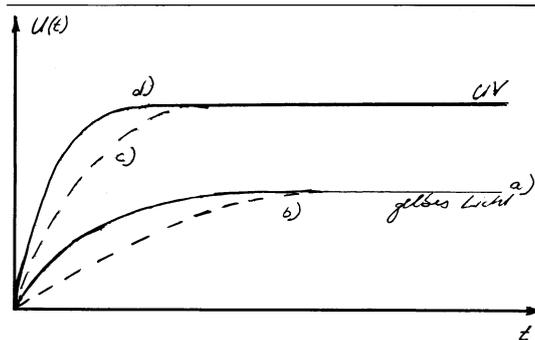
- 24) Ein Teilchen mit der Masse $6.65 \cdot 10^{-27}$ kg befindet sich in einem unendlich hohen Potentialtopf der Breite L . Zum dritten Energieniveau gehört die Energie $2.00 \cdot 10^{-24}$ J. Wie gross ist L ?
- 25) Die Energie des ausgesandten α – Teilchens bei ^{226}Ra beträgt 4.8 MeV, beim ^{224}Ra hingegen 5.9 MeV. Welches der beiden Isotope hat die grössere Halbwertszeit und warum?

Lösungen

1)

- a) s. Skript
- b) Die relativ langsamen Fotoelektronen würden durch die Gasmoleküle gebremst und den Ring somit nicht erreichen. Ausserdem würde O₂ die Cäsiumschicht oxidieren und damit die Fotozelle unbrauchbar machen.
- c) Beim äusseren Photoeffekt verlassen die Elektronen vollständig das Metall, beim inneren Photoeffekt wechseln sie nur in eine andere Schicht (z.B. in einer Solarzelle oder im Auge). (s. auch Impulse Physik II, S. 196)

2)



- 3) Es ist $\lambda_1 = 350 \text{ nm} \Rightarrow f_1 = 8.571 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ bei U_1 und $\lambda_2 = 250 \text{ nm} \Rightarrow f_2 = 1.2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ bei U_2 . Gemäss nebenstehender Abbildung ist

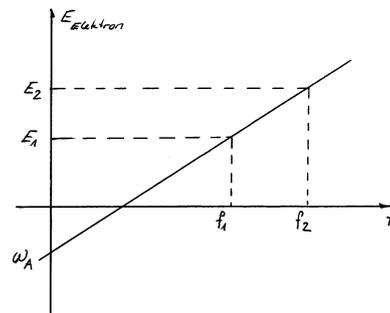
$$E_{El} = E_{Licht} - W_A$$

$$U_2 \cdot e = h \cdot f_2 - W_A$$

$$U_1 \cdot e = h \cdot f_1 - W_A$$

$$(U_2 - U_1) \cdot e = h \cdot (f_2 - f_1)$$

$$h = \frac{(U_2 - U_1) \cdot e}{(f_2 - f_1)} = \underline{\underline{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}}$$



4)

a) $W_A = h \cdot f - U \cdot e = h \cdot \frac{c}{\lambda} - U \cdot e = 6.07 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \underline{\underline{3.79 \text{ eV}}}$.

b) $W_{Ag} \approx 7.6455 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ und $E_{El} = E_{Licht} - W_{Ag} = \frac{1}{2} m v^2$, also $v = \underline{\underline{1.11 \cdot 10^6 \frac{m}{s}}}$.

5) $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{589 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = \underline{\underline{3.37 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}$

6) Die Energie eines Photons beträgt $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{633 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = \underline{\underline{3.14 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}$. Die

abgegebene Leistung bedeutet, dass pro Sekunde $N_{\text{Photonen}} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{s}}}{3.14 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = \underline{\underline{1.59 \cdot 10^{16}}}$ abgegeben

werden. Umgerechnet auf die Fläche ergeben sich $Q = \frac{N}{A} = \frac{1.59 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}}{\left(\frac{3.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2}\right)^2 \cdot \pi} = 1.65 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2}$.

7) Ein Photon hat die Energie $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = \underline{\underline{3.61 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}$. Pro Sekunde werden vom Auge 100 Photonen aufgenommen, was einer Energie von $P = 3.61 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot 100 \frac{1}{\text{s}} = \underline{\underline{3.61 \cdot 10^{-17} \frac{\text{J}}{\text{s}}}}$.

8) Die Lösungen sind: $9.93 \cdot 10^{-28} \text{ J}$, $1.99 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ und $1.99 \cdot 10^{-16} \text{ J}$

9) $E = h \cdot f = 2.1 \text{ eV}$

10) Bei einer Einsatzspannung von 0.65 V strahlt die Diode mit einer Wellenlänge von $\lambda = 1.91 \mu\text{m}$.

11) Die Diode für 950 nm hat eine Einsatzspannung von 1.31 V. Sie sendet Infrarotstrahlung aus, die für das Auge nicht sichtbar ist.

12) Die abgegebene Energie ist gleich der kinetischen Energie der Elektronen, die jedoch relativistisch zu berechnen ist. $\Delta E = E_{\text{kin}} = E_{\text{ges}} - E_0$. Das ist gleich

$\Delta E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 c^2 = 0.15 m_0 c^2 = 7.9 \cdot 10^4 \text{ eV}$. Die Frequenz beträgt daher

$f_1 = \frac{hf_0 - \Delta E}{h} = 1.01 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$.

13) Aus $\Delta \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \varphi)$ folgt durch eine Umformung $\cos \varphi = 1 - \frac{\Delta \lambda m_e c}{h} = 0.5005$ und daraus $\varphi = 60^\circ$.

14) Die Geschwindigkeit des Balls war 66.61 m/s. Damit folgt für die Wellenlänge

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{0.057 \text{ kg} \cdot 66.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \underline{\underline{1.75 \cdot 10^{-34} \text{ m}}}$. Die Wellenlänge makroskopischer Objekte ist also

bei weitem zu klein, als dass sich daran Welleneigenschaften beobachten liessen.

15) Nach dem Energieerhaltungssatz gilt $E_{kin} = qU = eU = \frac{1}{2} m_0 v^2$. Aufgelöst nach v erhält man

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m_0}}. \text{ Mit } p = m \cdot v = \sqrt{2eUm_0} = \sqrt{2E_{kin}m_0} \text{ folgt für die deBroglie Wellenlänge}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2E_{kin}m_0}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_{kin}m_0 \cdot c^2}}. \text{ Setzen wir für } hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm} \text{ und für } m_0c^2 = 0.511 \text{ MeV} \text{ ein,}$$

so erhalten wir $\lambda = \frac{1.226 \text{ nm}}{\sqrt{E_{kin}}}$, wobei E_{kin} in eV einzusetzen ist.

16) Einsetzen der Werte, in die unter Aufgabe 2 hergeleitete Formel $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2E_{kin}m_0}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_{kin}m_0 \cdot c^2}}$

$$\text{, ergibt mit } m_0c^2 = 938 \text{ MeV } \lambda = \frac{0.0286 \text{ nm}}{\sqrt{500000}} = \underline{\underline{4 \cdot 10^{-5} \text{ nm}}}.$$

17) Die Wellenlänge berechnen wir mit $\lambda = \frac{r \cdot a}{l} = \frac{2}{l} \cdot a = \underline{\underline{0.176 \cdot 10^{-10} \text{ m}}}$. Daraus können wir unter Verwendung der deBroglie Beziehung das Plancksche Wirkungsquantum berechnen:

$$h = \lambda \cdot \sqrt{2emU} = 0.0176 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \sqrt{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5000 \text{ V} \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = \underline{\underline{6.743 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}}.$$

18) Es gilt $\sin \alpha = \frac{\Delta p}{p} = \frac{\hbar}{2\Delta x m v}$, mit $\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x}$ und $p = mv$. Aufgelöst bekommt man

$$v = \frac{\hbar}{2\Delta x m \sin \alpha} = 1.27 \cdot 10^{-36} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

19) Aus der Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ bekommt man $\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x}$. Daraus folgt für die Unschärfe der Geschwindigkeit $\Delta v \geq 1 \cdot 10^{-28} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

20) Aus der Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ bekommt man $\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta v}$. Daraus folgt für die Unschärfe

$$\text{des Ortes } \Delta x \geq \frac{1.0545 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1 \cdot 10^{-27} \text{ m}.$$

21) Folgt...

22) Folgt...

23) Folgt...

24) Die Energien berechnen sich nach $E = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$. Daraus erhält man $L = \sqrt{\frac{n^2 h^2}{8mE}} = 6.1 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

- 25) Ausgehend von der Annahme, dass für beide Isotope der Potentialverlauf für ein α – Teilchen die gleiche Höhe hat, wird dasjenige α - Teilchen mit der grösseren Energie die geringere Barrierebreite vor sich haben. Dadurch steigt die Tunnelwahrscheinlichkeit rapide an. ^{224}Ra müsste also eine kleinere Halbwertszeit haben als ^{226}Ra . Dies ist auch der Fall: $T_{1/2}^{224\text{Ra}} = 3.66\text{ d}$ gegenüber $T_{1/2}^{226\text{Ra}} = 1600\text{ y}$.