

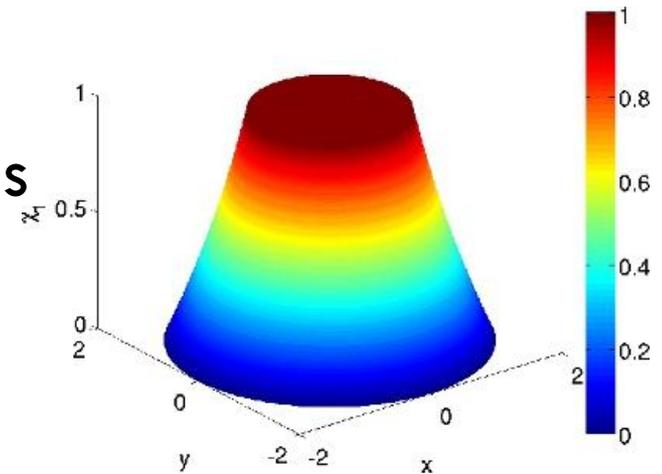
ABKÜHLUNGSPROZESSE



DISPOSITION

2

- Abkühlung von Wasser
- Newton'sches Abkühlungsgesetz
- Abkühlung von Kaffee/Milch
- Bestimmung des Todeszeitpunktes
- Mpemba - Effekt
- Abkühlung eines Metallstabs
- Anwendungen von Abkühlungsprozessen

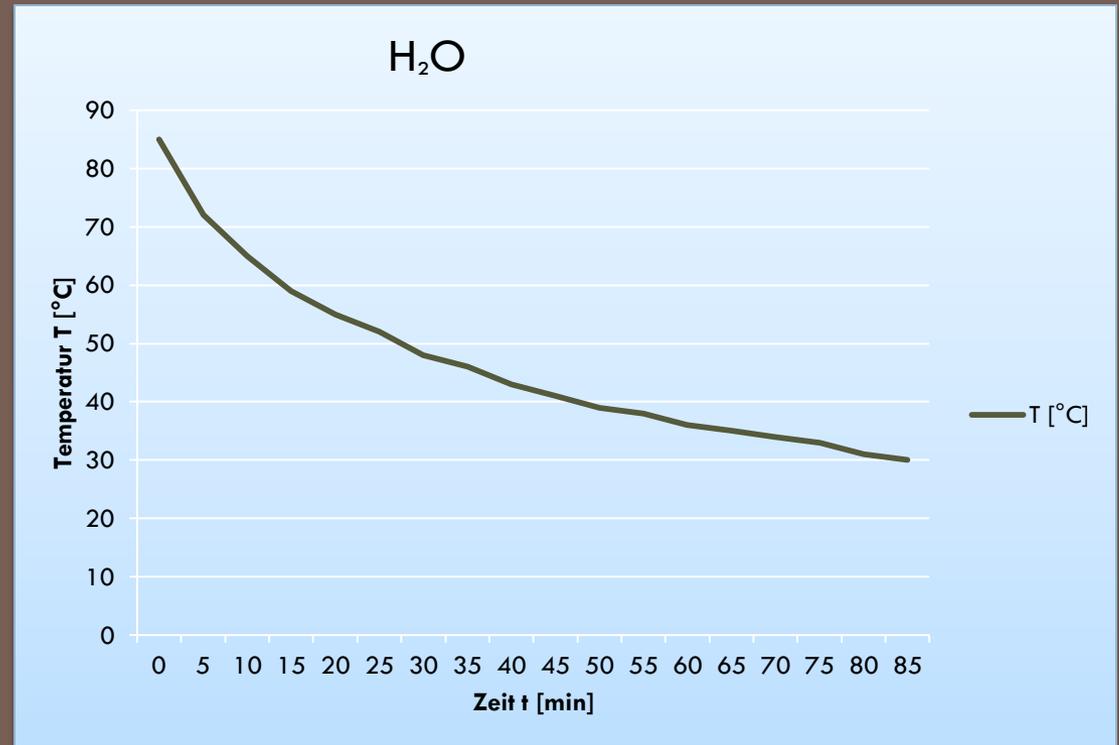


ABKÜHLUNG VON WASSER



ABKÜHLUNG VON H₂O

t [min]	T [°C]
0	85
5	72
10	65
15	59
20	55
25	52
30	48
35	46
40	43
45	41
50	39
55	38
60	36
65	35
70	34
75	33
80	31
85	30



NEWTON'SCHES ABKÜHLUNGSGESETZ

NEWTON'SCHES ABKÜHLUNGSGESETZ

6

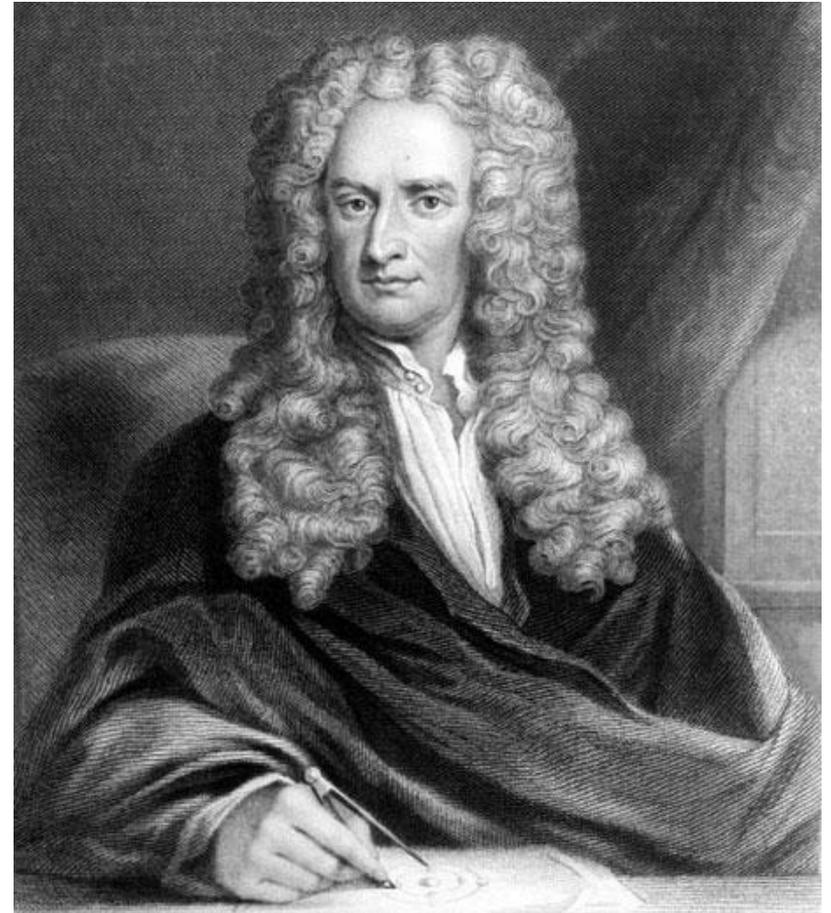
$$\Delta T / \Delta t = -k (T - T_u)$$

$$\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t)$$

T_u ...Umgebungstemperatur

$T(t)$...Temperatur

k ...Abkühlfaktor



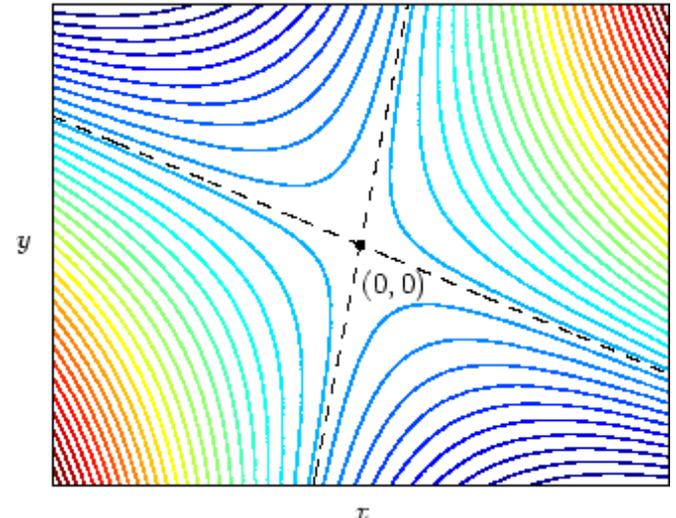
NEWTON'SCHES ABKÜHLUNGSGESETZ

7

□ Differentialgleichung

$$T'(t) = -k [T(t) - T_u]$$

$$T(t) = (T_0 - T_u) * e^{(-kt)} + T_u$$



KAFFEE & MILCH

Wann kühlt Kaffee schneller ab?

KAFFEE & MILCH

9

- 2 Fälle:
 - Wenn man die Milch gleich mit dem Kaffee vermischt und dann 10 min stehen lässt

 - Wenn man den Kaffee 10 min stehen lässt und dann mit der Milch vermischt

KAFFEE & MILCH

10

□ Angaben:

- ▣ 1.Flüssigkeit:
Kaffee

Menge p
Temperatur T_0

- ▣ 2.Flüssigkeit:
Milch

Menge q
Temperatur T_1

Zeit =

10 min

$$T_1 < T_u$$

$$T_1 < T_0$$



KAFFEE & MILCH

11

- Wir setzen ein in die Lösung der gewöhnlichen Differenzialgleichung

$$T(t) = (T_0 - T_u) * e^{-k * t} + T_u$$

KAFFEE & MILCH

12

- 1. Methode:

$$T(10) = [(p \cdot T_o + q \cdot T_1) / (p + q) - T_u] \cdot e^{-k \cdot t} + T_u$$

- 2. Methode:

$$T(10) = \{p \cdot [(T_o - T_u) \cdot e^{-k \cdot t} + T_u] + q \cdot T_1\} / (p + q)$$

- Durch einsetzen und umformen:

$$(T_1 - T_u) \cdot (e^{-k \cdot t} - 1) > 0$$

Da wir annehmen : $T_1 < T_u$ ist diese Aussage wahr,
d.h. Methode 2 wird kühler.

BESTIMMUNG DES TODESZEITPUNKTES



Bestimmung des Todeszeitpunktes

14

□ Annahmen

- Leichnam wird zum ZP $t=0$ gefunden und seine Temperatur wird gemessen
- T_u ist konstant 20°C
- Körpertemperatur zu Todeszeitpunkt $T_d = 37^\circ\text{C}$
- $T_o = 29,4^\circ\text{C}$
- $T_1 = 23,3^\circ\text{C}$ nach $t_1 = 2\text{h}$

Bestimmung des Todeszeitpunktes

15

1. Wärmekoeffizienten bestimmen

$$k = \frac{-1}{t_1} \ln \left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T} \right)$$

2. Zeitpunkt des Todes bestimmen

$$t_d = -\frac{1}{k} \ln \left(\frac{\theta_d - T}{\theta_0 - T} \right)$$

Bestimmung des Todeszeitpunktes

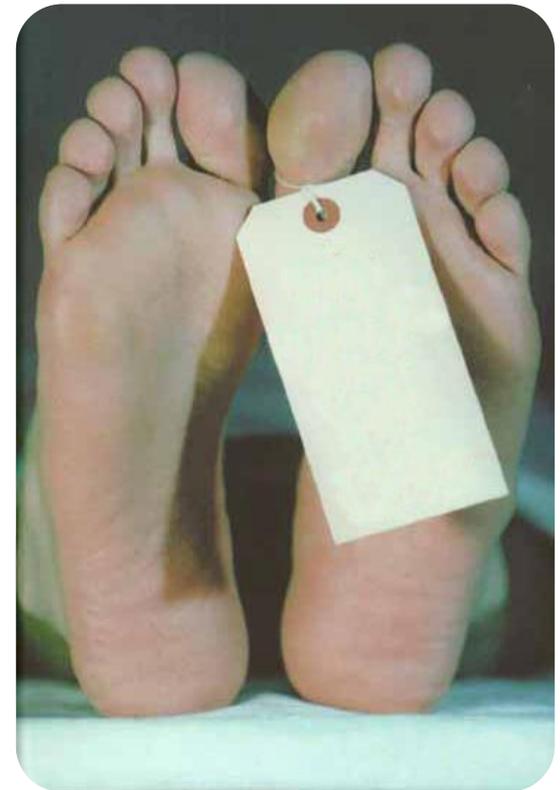
16

It. Angaben:

$$k = \frac{-1}{2h} \ln \left(\frac{23,3 - 20}{29,4 - 20} \right) \approx 0,523h^{-1}$$

$$t_d = -\frac{1}{0,523} \ln \left(\frac{37 - 20}{29,4 - 20} \right) h \approx -1,129h$$

Somit wissen wir, dass der Mensch vor 1h 8' gestorben ist.



MPEMBA - EFFEKT

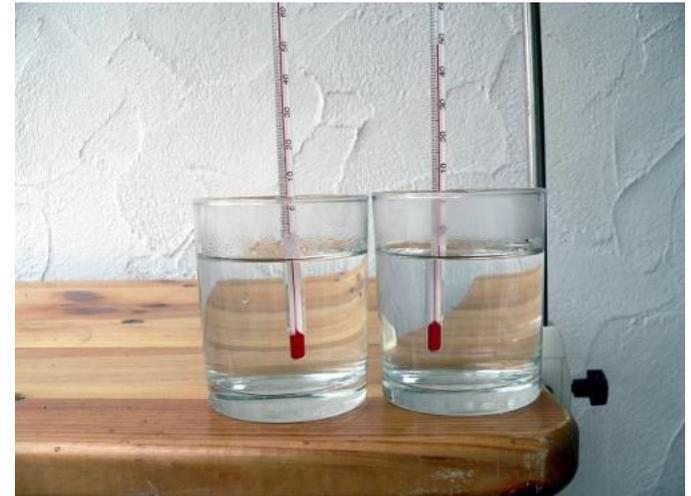
Gefriert warmes Wasser wirklich schneller als kaltes?

MPEMBA EFFEKT

18

□ Entdecker

- Aristoteles
- Roger Bacon
- René Descartes



□ Wiederentdeckt von Erasto B. Mpemba

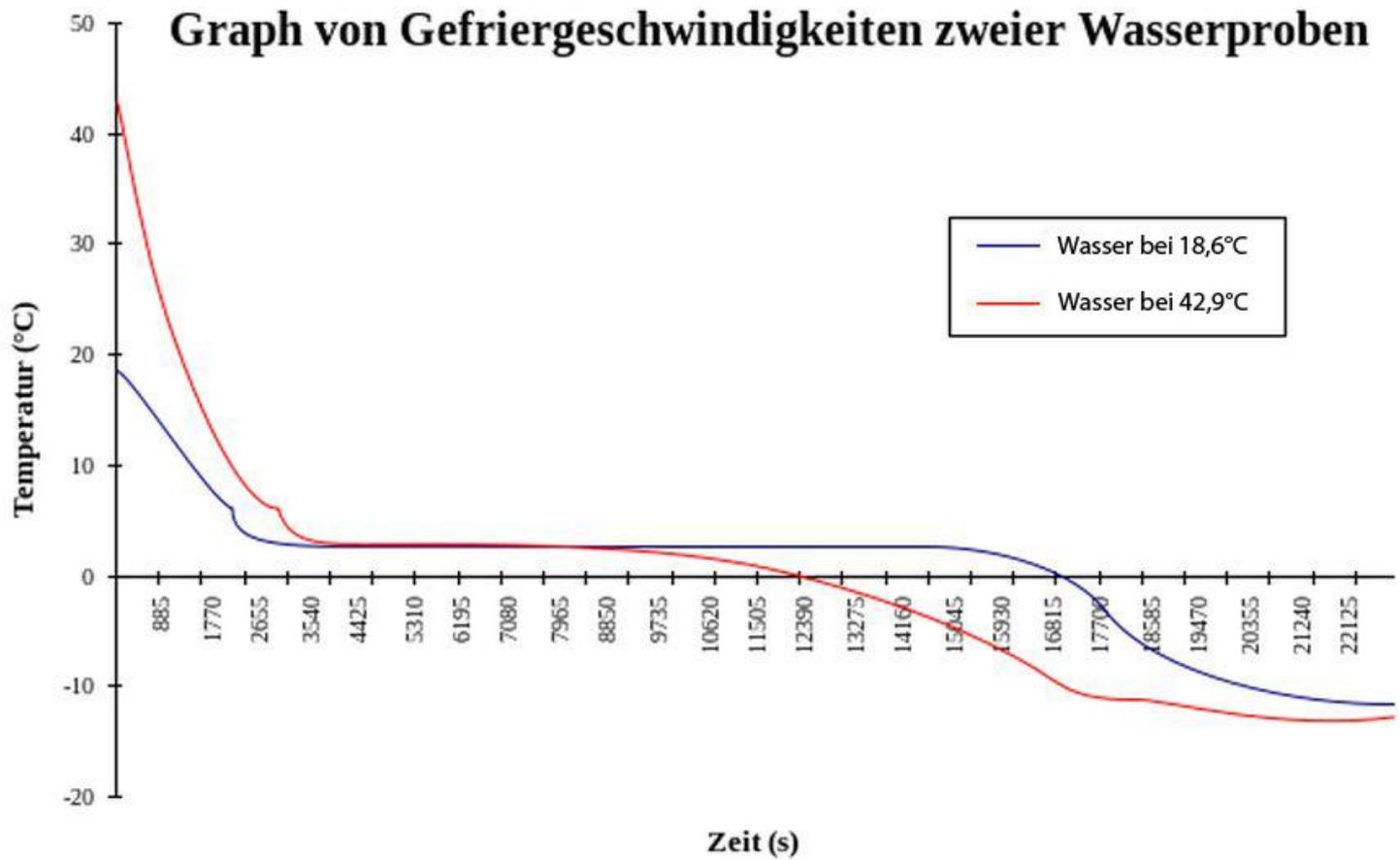
MPEMBA EFFEKT

19

- Heißes Wasser höhere Verdunstungsrate, mehr Wärmeenergie entzogen → holt kaltes Wasser ein
- Volumenverlust → Gefrierprozess schneller

MPEMBA EFFEKT

20



WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

Abkühlung eines Kupferstabes

WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

22

Der Temperaturverteilung $T(x,t)$ im Inneren eines Kupferstabes soll bestimmt werden.



Annahmen:

- Konstante Materialeigenschaften (keine Unterschiede bei der Dichte, keine Legierung)
- Keine inneren Wärmequellen

WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

23

Angaben

- Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t=0$: $T(x,0)=T_A(x)$
- Dichte $\rho = 8930\text{kg/m}^3$
- Spezifische Wärmekapazität $c = 394\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
- Wärmeleitfähigkeit $\lambda=385\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
- Wärmeleitzahl $a = \lambda/(\rho\cdot c)$
- Temperatur am linken Rand $T_a=20^\circ\text{C}$
- Temperatur am rechten Rand $T_b = 40^\circ\text{C}$
- Stablänge $L = 1\text{m}$
- $T_A(x)=T_a+(T_b-T_a)\cdot(x/L+\sin(x\cdot\pi/L))$

WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

24

- Mithilfe der Anfangsbedingung

$$T_A(x) = T_a + (T_b - T_a) * (x/L + \sin(x * \pi/L))$$

können wir die Temperatur in einem bestimmten Punkt des Stabes bestimmen, x ist dabei der Abstand des Punktes vom linken Rand.

- Um die Temperatur zum nächsten Zeitpunkt bestimmen zu können verwenden wir folgende Differentialgleichung:

$$\rho * c * \partial T / \partial t = \lambda * \partial^2 T / \partial x^2$$

- $\partial T / \partial t$: 1. Ableitung von $T(x,t)$ nach t
- $\partial^2 T / \partial x^2$: 2. Ableitung von $T(x,t)$ nach x

WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

25

- Differenzengleichung:

$$\rho * c * (T(x, t+h) - T(x, t)) / h = \lambda * (T(x+l, t) + T(x-l, t) - 2 * T(x, t)) / l^2$$

- Diese Gleichung formen wir um nach $T(x, t+h)$:

$$T(x, t+h) = \lambda / (\rho * c) * (T(x+l, t) + T(x-l, t) - 2 * T(x, t)) / l^2 + T(x, t)$$

- Mithilfe dieser Formel können wir die Temperatur zum Zeitpunkt $t+h$ bestimmen. Dabei können wir h frei wählen, je nachdem zu welchem Zeitpunkt wir die Temperatur bestimmen möchten, l entspricht dem Abstand zum nächsten Punkt.
- → Temperatur des Stabes in allen möglichen Punkten und Zeiten bestimmen

WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG - Ergebnisse

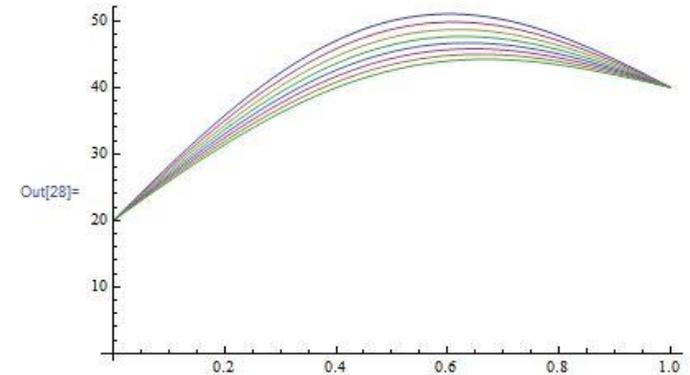
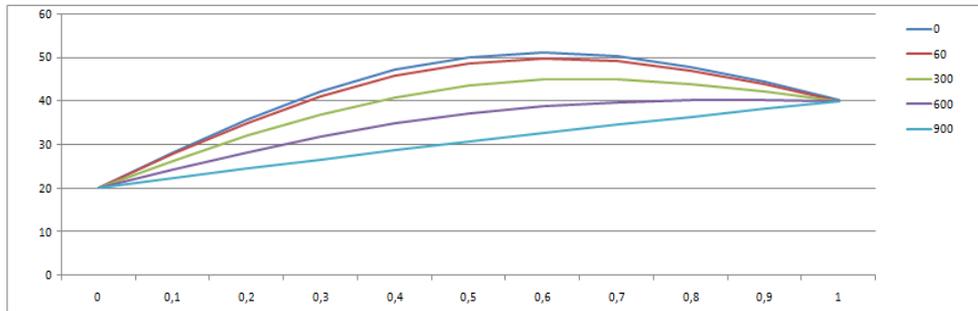
26

Anfangstemperatur Ta
20°C



Anfangstemperatur Tb Länge
40°C 1

Zeit [s]/Ort [m]	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1
0	11,81966011	20	28,1803399	35,755705	42,1803399	47,0211303	50	51,0211303	50,1803399	47,755705	44,1803399	40	35,81966011
60		20	27,7831469	35,0001992	41,1404752	45,7986961	48,7146566	49,7986961	49,1404752	47,0001992	43,7831469	40	
300		20	26,1943751	31,9781756	36,9810167	40,9089593	43,573283	44,9089593	44,9810167	43,9781756	42,1943751	40	
600		20	24,2084104	28,2006462	31,7816934	34,7967882	37,1465661	38,7967882	39,7816934	40,2006462	40,2084104	40	
900		20	22,2224456	24,4231167	26,5823702	28,6846172	30,7198491	32,6846172	34,5823702	36,4231167	38,2224456	40	



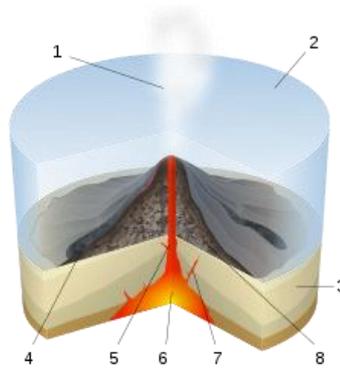
ANWENDUNG VON ABKÜHLUNGSPROZESSEN



- Abkühlgeschwindigkeit maßgebend für Eigenschaften
→ Kristallkorngröße indirekt proportional zu
Abkühlgeschwindigkeit
- Stahl: polymorphes Verhalten und Diffusion für Härten
und andere Wärmebehandlungsverfahren
- Wärmefluss in verschiedenen Geometrien analysieren

AUFEINANDERTREFFEN VON STOFFEN MIT EXTREMEN TEMPERATURUNTERSCHIEDEN

29



WAS WIR WISSEN, IST EIN TROPFEN,
WAS WIR NICHT WISSEN - EIN OZEAN.

Sir Isaac Newton (1643-1727)